

Câu I (2,0 điểm).

Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{2+5\sqrt{x}}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

1. Rút gọn biểu thức P .
2. Tìm tất cả các giá trị của x để $P > 1$.

Câu II (2,0 điểm).

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$.
Tìm a, b để đường thẳng (d) có hệ số góc bằng 3 và đi qua điểm $M(-1; 2)$.

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

Câu III (2,0 điểm).

1. Giải phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$.

2. Cho phương trình $x^2 - 2mx - m^2 - 2 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 (với $x_1 < x_2$) thỏa mãn hệ thức $x_2 - 2|x_1| - 3x_1x_2 = 3m^2 + 3m + 4$.

Câu IV (3,0 điểm).

Cho đường tròn (O) và một điểm M nằm ngoài đường tròn. Từ điểm M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến (O) (với A, B là các tiếp điểm). Gọi C là điểm đối xứng với B qua O , đường thẳng MC cắt đường tròn (O) tại D (D khác C).

1. Chứng minh $MAOB$ là tứ giác nội tiếp.
2. Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng AD và MO . Chứng minh $MN^2 = ND \cdot NA$.
3. Gọi H là giao điểm của MO và AB . Chứng minh $\left(\frac{HA}{HD}\right)^2 - \frac{AC}{HN} = 1$.

Câu V (1,0 điểm). Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $4x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 6y$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{8}{(x+3)^2} + \frac{16}{(y+4)^2} + \frac{1}{(z+1)^2} + 2023$.

———— HẾT ————

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn Thi: Toán

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 10/6/2023

(Đề thi có 05 câu, gồm 01 trang)

Câu I. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{2+5\sqrt{x}}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

1. Rút gọn biểu thức P .
2. Tìm các giá trị của x để $P > 1$.

Câu II. (2,0 điểm)

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$.

Tìm a, b để đường thẳng (d) có hệ số góc bằng 3 và đi qua điểm $M(-1;2)$

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

Câu III. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$.

2. Cho phương trình $x^2 - 2mx - m^2 - 2 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 (với $x_1 < x_2$) thỏa mãn hệ thức $x_2 - 2|x_1| - 3x_1x_2 = 3m^2 + 3m + 4$.

Câu IV. (3,0 điểm)

Cho đường tròn (O) và một điểm M nằm ngoài đường tròn. Từ điểm M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến (O) (với A, B là các tiếp điểm). Gọi C là điểm đối xứng với B qua O , đường thẳng MC cắt đường tròn (O) tại D (D khác C).

1. Chứng minh $MAOB$ là tứ giác nội tiếp.
2. Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng AD và MO . Chứng minh $MN^2 = ND.NA$.
3. Gọi H là giao điểm của MO và AB . Chứng minh $\left(\frac{HA}{HD}\right)^2 - \frac{AC}{HN} = 1$.

Câu V. (1,0 điểm) Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $4x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 6y$.

Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{8}{(x+3)^2} + \frac{16}{(y+4)^2} + \frac{1}{(z+1)^2} + 2023$.

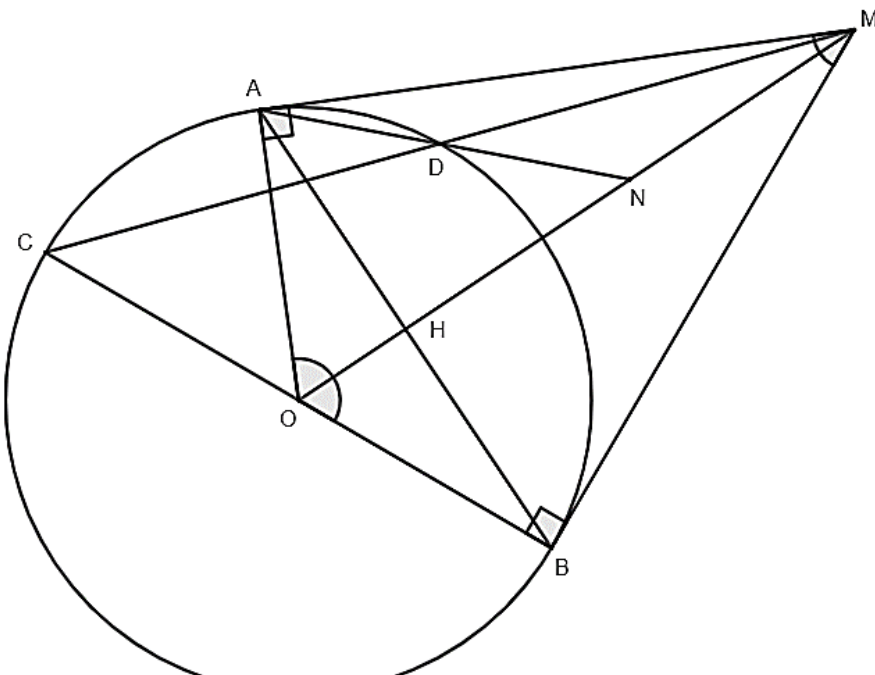
-----HẾT-----

Họ tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Chữ kí của CBCT1:..... Chữ kí của CBCT2:.....

HƯỚNG DẪN CHẤM THI

Câu	Ý	Đáp án	Điểm
I (2điểm)	1 (1đ)	Với $x \geq 0, x \neq 4$ thì $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{2+5\sqrt{x}}{x-4}$	0,25
		$\Leftrightarrow P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} + \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} - \frac{2+5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$	0,25
		$\Leftrightarrow P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2) + (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2) - (2+5\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$	0,25
		$\Leftrightarrow P = \frac{x-2\sqrt{x}+x+2\sqrt{x}+\sqrt{x}+2-2-5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$	0,25
		$\Leftrightarrow P = \frac{2x-4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$	0,25
		Vậy $P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ Với $x \geq 0, x \neq 4$	0,25
II (2điểm)	2 (1đ)	Để $P > 1$ thì $\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} > 1 \Rightarrow \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - 1 > 0$ $\Rightarrow 2\sqrt{x} - \sqrt{x} - 2 > 0 \Rightarrow \sqrt{x} > 2 \Rightarrow x > 4$	0,25
		Vậy $x > 4$ thì $P > 1$	0,25
	1 (1đ)	Vì đường thẳng (d) có hệ số góc bằng 3 nên $a = 3$ Vì đường thẳng (d) đi qua điểm $M(-1;2)$ nên thay $x = -1; y = 2$ vào đường thẳng $(d): y = ax + b$ ta được: $2 = 3.(-1) + b \Rightarrow b = 5$ Vậy $a = 3; b = 5$	0,5 0,5
	2 (1,5đ)	Ta có: $\begin{cases} 3x+y=6 \\ x-y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y+x-y=6-2 \\ x-y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x=4 \\ x-y=-2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 1-y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (1; 3)$	0,5 0,25 0,25
	1 (1đ)	Xét phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ có $a + b + c = 0$	0,25
		Nên phương trình có hai nghiệm phân biệt là $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} = 2 \end{cases}$	0,25
		Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1; x_2 = 2$	0,25
			0,25

III (2điểm)	2 (1đ)	Xét phương trình $x^2 - 2mx - m^2 - 2 = 0$ có: $\Delta' = (-m)^2 - 1(m^2 - 2) = m^2 + m^2 + 2 = 2m^2 + 2 > 0 \forall m.$ Áp dụng định lý Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = -m^2 - 2 \end{cases}$ Nhận thấy $x_1 x_2 = -m^2 - 2 < 0 \forall m$ nên phương trình có hai nghiệm trái dấu $x_1 < 0 < x_2$ Mặt khác: $x_2 - 2 x_1 - 3x_1 x_2 = 3m^2 + 3m + 4$ $\Leftrightarrow x_2 + 2x_1 - 3x_1 x_2 = 3m^2 + 3m + 4$ $\Leftrightarrow 2x_1 + x_2 - 3(-m^2 - 2) = 3m^2 + 3m + 4$ $\Leftrightarrow 2x_1 + x_2 + 3m^2 + 6 = 3m^2 + 3m + 4$ $\Leftrightarrow 2x_1 + x_2 = 3m - 2$ Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ 2x_1 + x_2 = 3m - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m - 2 \\ x_2 = 2m - m + 2 = m + 2 \end{cases}$ Thay vào $x_1 x_2 = -m^2 - 2$ ta được phương trình $(m - 2)(m + 2) = -m^2 - 2$ $\Leftrightarrow m^2 - 4 = -m^2 - 2$ $\Leftrightarrow 2m^2 = 2 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1 \text{ (thỏa mãn yêu cầu bài toán)}$ Vậy $m = 1; m = -1$.	0,25 0,25 0,25 0,25
	Vẽ hình (0,25đ)	Học sinh vẽ hình tương đối đúng, nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ sai sẽ không chấm điểm (phần hình) 	0,25
	1 (1,25đ)	Vì MA, MB là tiếp tuyến của (O) $\Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^\circ$ $\Rightarrow \widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ Mà A, B là hai đỉnh đối diện của tứ giác MAOB. Vậy MAOB là tứ giác nội tiếp (đpcm)	0,5 0,25 0,25

	2 (1đ)	Ta có $\widehat{MDN} = \widehat{ADC}$ (đối đỉnh), $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC) $\Rightarrow \widehat{MDN} = \widehat{ABC}$ mà $\widehat{ABC} = \widehat{ABO} = \widehat{AMO} = \widehat{AMN}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AO) $\Rightarrow \widehat{MDN} = \widehat{AMN}$ Xét $\triangle MND$ và $\triangle ANM$ có: $\begin{array}{c} \widehat{ANM} \text{ chung} \\ \widehat{MDN} = \widehat{AMN} \end{array}$ $\Rightarrow \triangle MND \sim \triangle ANM \text{ (g - g)}$ $\Rightarrow \frac{MN}{NA} = \frac{ND}{MN} \Rightarrow MN^2 = ND \cdot NA \text{ (đpcm)}$	0,25 0,25 0,25 0,25
IV (3điểm)	3 (0,5đ)	Xét $\triangle MAD$ và $\triangle MCA$ có: $\widehat{AMC}$ chung $\widehat{MAD} = \widehat{MCA}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn AD) $\Rightarrow \triangle MAD \sim \triangle MCA \text{ (g - g)}$ $\Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MA} \text{ (cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)} \Rightarrow MA^2 = MC \cdot MD \quad (1)$ Ta có: $OA = OB (= R) \Rightarrow O$ thuộc trung trực của AB Xét $\triangle OAM$ vuông tại A có đường cao AH, áp dụng lượng giác trong tam giác vuông ta có: $MA^2 = MH \cdot MO \quad (2)$ Từ (1) và (2) suy ra $MC \cdot MD = MH \cdot MO \Rightarrow \frac{MC}{MH} = \frac{MO}{MD}$ Xét $\triangle MOC$ và $\triangle MDH$ có: $\begin{array}{c} \widehat{OMC} \text{ chung} \\ \frac{MC}{MH} = \frac{MO}{MD} \end{array}$ $\Rightarrow \triangle MOC \sim \triangle MDH \text{ (g - g)}$ $\Rightarrow \widehat{MHD} = \widehat{MCO} \text{ mà } \widehat{MCO} = \widehat{DCB} = \widehat{DAB} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung DB)}$ $\Rightarrow \widehat{MHD} = \widehat{DAB} \text{ mà } \widehat{MHD} + \widehat{HHA} = \widehat{AHM} = 90^\circ$ $\Rightarrow \widehat{DAB} + \widehat{DHA} = 90^\circ \Rightarrow \triangle ADH \text{ vuông tại D}$ $\Rightarrow HD \perp AN \text{ tại D.}$ Áp dụng định lý Pythagore trong $\triangle ADH$ vuông tại D có $HA^2 = AD^2 + HD^2$ Ta có: $\left(\frac{HA}{HD}\right)^2 - \frac{AC}{HN} = 1 \Leftrightarrow \frac{AD^2 + HD^2}{HD^2} = 1 + \frac{AC}{HN}$ $\Leftrightarrow \frac{AD^2}{HA^2} + 1 = 1 + \frac{AC}{HN} \Leftrightarrow \frac{AD^2}{HD^2} = \frac{AC}{HN}$ $\triangle AHN$ vuông tại H, có đường cao HD nên ta có $HD^2 = AD \cdot DN$ (hệ thức lượng giác trong tam giác vuông) $\Rightarrow \frac{AD^2}{HD^2} = \frac{AC}{HN} \Leftrightarrow \frac{AD^2}{AD \cdot DN} = \frac{AC}{HN} \Rightarrow \frac{AD}{DN} = \frac{AC}{HN} \Leftrightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DN}{HN}$	

		Xét $\triangle ADC$ và $\triangle NDM$ có: $\widehat{ADC} = \widehat{MDN} \text{ (đối đỉnh)}$ $OM // AC \text{ (} AC \perp AB; OM \perp AB \text{)} \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{DNM} \text{ (so le trong)}$ $\Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle NDM \text{ (g - g)}$ $\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DN}{NM} \Rightarrow \left(\frac{HA}{HD} \right)^2 - \frac{AC}{HN} = 1 \Leftrightarrow \frac{DN}{NM} = \frac{DN}{HN} \Leftrightarrow MN = HN$ $\Rightarrow MN^2 = HN^2$ Suy ra được điều phải chứng minh	
V (1 điểm)		Ta có: $4x^2 + 4 \geq 2\sqrt{4x^2 \cdot 4} = 8x$; $4y^2 + 4 \geq 8y$; $4z^2 + 4 \geq 8z$ Cộng vế với vế ta được: $24 \geq 8x + 8z + 2y \Leftrightarrow 3 \geq x + z + \frac{y}{4}$ Lại có: $\frac{8}{(x+3)^2} + \frac{16}{(y+4)^2} + \frac{1}{(z+1)^2} = \frac{8}{(x+3)^2} + \frac{1}{\left(\frac{y}{4}+1\right)^2} + \frac{1}{(z+1)^2}$ $\geq \frac{8}{\left(z + \frac{y}{4} + 2\right)^2} + \frac{8}{(x+3)^2} \geq 8 \cdot \frac{8}{\left(z + \frac{y}{4} + 2 + x + 3\right)^2}$ $\geq 8 \cdot \frac{8}{(3+2+3)^2} = 1$ $\Rightarrow \frac{8}{(x+3)^2} + \frac{16}{(y+4)^2} + \frac{1}{(z+1)^2} + 2023 \geq 1 + 2023 = 2024$ Dấu “=” xảy ra khi $x = 1$; $y = 4$; $z = 1$. Vậy $\text{MIN}_M = 2024$ Khi $x = 1$; $y = 4$; $z = 1$	0,25 0,25 0,25 0,25