

Bài 1. (2,0 điểm) Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $x^2 + 2x - 3 = 0$

b)
$$\begin{cases} -x + 3y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Bài 2. (1,5 điểm) Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = (\sqrt{27} - \sqrt{12} + \sqrt{48})\sqrt{3}$

b) $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{3\sqrt{x}}$ với $0 < x$ và $x \neq 1$.

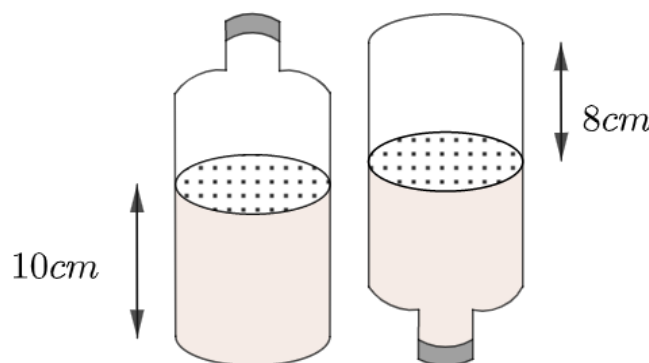
Bài 3. (1,5 điểm) Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P) .

a) Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

b) Tìm giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $(d): y = 2mx - m^2 + 1$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 2024 < x_2$.

Bài 4. (1,0 điểm) Một công ty dự định thuê một số xe lớn cùng loại để chở vừa hết 210 người đi du lịch Mũi Né. Nhưng thực tế, công ty lại thuê toàn bộ xe nhỏ hơn cùng loại. Biết rằng số xe nhỏ phải thuê nhiều hơn số xe lớn là 2 chiếc thì mới chở vừa hết số người trên và mỗi xe nhỏ chở ít hơn mỗi xe lớn là 12 người. Tính số xe nhỏ đã thuê.

Bài 5. (0,5 điểm) Một cái chai có chứa một lượng nước, phần chứa nước là hình trụ có chiều cao 10 cm, khi lật ngược chai lại thì phần không chứa nước cũng là một hình trụ có chiều cao 8 cm (như hình vẽ bên. Biết thể tích của chai là $450\pi \text{ cm}^3$. Tính bán kính của đáy chai (giả sử độ dày của thành chai và đáy chai không đáng kể).



Bài 6. (2,0 điểm) Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài đường tròn từ A , vẽ hai tiếp tuyến AB, AC (B, C là hai tiếp điểm).

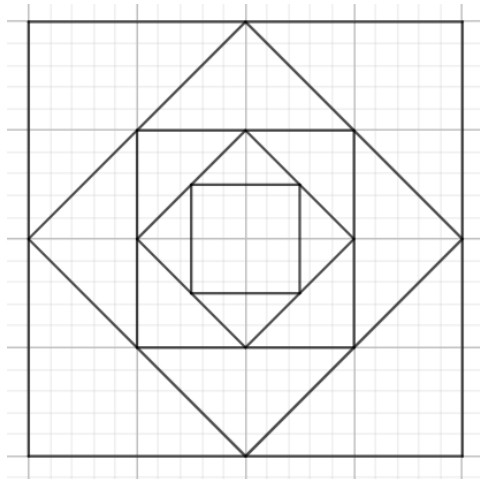
a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

b) Vẽ đường kính CE , nối AE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F .

Chứng minh $AB^2 = AE \cdot AF$.

c) Cho OA cắt BC tại H , BF cắt OA tại I . Chứng minh I là trung điểm của AH .

Bài 7. (0,5 điểm) Từ hình vuông đầu tiên, bạn Hùng vẽ hình vuông thứ hai có các đỉnh là trung điểm của các cạnh hình vuông thứ nhất, vẽ tiếp hình vuông thứ ba có các đỉnh là trung điểm của các cạnh hình vuông thứ hai và cứ tiếp tục như vậy (xem hình minh họa bên). Giả sử hình vuông thứ bảy có diện tích bằng 32 cm^2 . Tính diện tích hình vuông thứ năm.



----- Hết -----

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. (2,0 điểm) Giải phương trình và hệ phương trình sau

a) $x^2 + 2x - 3 = 0$

b)
$$\begin{cases} -x + 3y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Lời giải

a) $x^2 + 2x - 3 = 0$

Ta có: $\Delta = 2^2 - 4.1.(-3) = 16 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$

Do đó phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-2-4}{2.1} = -3$$

$$x_2 = \frac{-2+4}{2.1} = 1$$

Vậy tập nghiệm phương trình $S = \{-3; 1\}$

Cách khác:

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

Có $a + b + c = 1 + 2 + (-3) = 0$

Nên $x_1 = 1$

$$x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-3}{1} = -3$$

Vậy tập nghiệm phương trình $S = \{-3; 1\}$

b)
$$\begin{cases} -x + 3y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4y = 8 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x + 2 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm hệ phương trình $S = \{(1; 2)\}$

Bài 2. (1,5 điểm) Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = (\sqrt{27} - \sqrt{12} + \sqrt{48})\sqrt{3}$

b) $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{3\sqrt{x}}$ với $0 < x$ và $x \neq 1$.

Lời giải

a) $A = (\sqrt{27} - \sqrt{12} + \sqrt{48})\sqrt{3}$

$$A = (\sqrt{9.3} - \sqrt{4.3} + \sqrt{16.3})\sqrt{3}$$

$$A = (3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3})\sqrt{3}$$

$$A = 5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$$

$$A = 15$$

$$b) B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{3\sqrt{x}} \text{ với } 0 < x \text{ và } x \neq 1.$$

$$B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{3\sqrt{x}}$$

$$B = \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) \cdot \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$

$$B = 3$$

Bài 3. (1,5 điểm) Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P) .

a) Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

b) Tìm giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $(d): y = 2mx - m^2 + 1$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 2024 < x_2$.

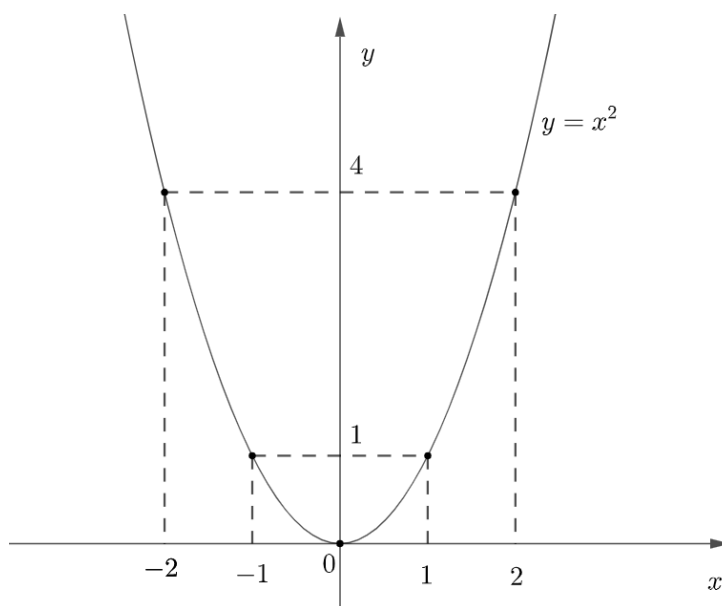
Lời giải

a) Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Đồ thị hàm số $y = x^2$ là một Parabol (P) đi qua các điểm $(-2; 4)$, $(-1; 1)$; $(0; 0)$; $(1; 1)$, $(2; 4)$



b) Tìm giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $(d): y = 2mx - m^2 + 1$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 2024 < x_2$.

Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm phương trình:

$$x^2 = 2mx - m^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

Đường thẳng (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0$$

$$\Leftrightarrow (-m)^2 - 1 \cdot (m^2 - 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m^2 + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 > 0 \quad (\text{Hiển nhiên})$$

Phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 hay đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 với mọi giá trị m .

$$x_1 = \frac{m - \sqrt{1}}{1} = m - 1$$

$$x_2 = \frac{m + \sqrt{1}}{1} = m + 1$$

Ta có: $x_1 < 2024 < x_2$

$$\Leftrightarrow m - 1 < 2024 < m + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 < 2024 \\ m + 1 > 2024 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 2025 \\ m > 2023 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = 2024 \quad (\text{Vì cần tìm } m \text{ có giá trị nguyên})$$

Vậy $m = 2024$ thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 2024 < x_2$.

Bài 4. (1,0 điểm) Một công ty dự định thuê một số xe lớn cùng loại để chở vừa hết 210 người đi du lịch Mũi Né. Nhưng thực tế, công ty lại thuê toàn bộ xe nhỏ hơn cùng loại. Biết rằng số xe nhỏ phải thuê nhiều hơn số xe lớn là 2 chiếc thì mới chở vừa hết số người trên và mỗi xe nhỏ chở ít hơn mỗi xe lớn là 12 người. Tính số xe nhỏ đã thuê.

Lời giải

Gọi số xe nhỏ (chiếc) công ty đã thuê là x , ($x \in \mathbb{N}$, $x > 2$).

Do đó số xe lớn (chiếc) công ty dự định thuê là $x - 2$.

Số xe lớn và nhỏ đều chở vừa hết 210 người nên:

$$\text{Số người trên xe nhỏ là: } \frac{210}{x} \quad (\text{người})$$

$$\text{Số người trên xe lớn là: } \frac{210}{x - 2} \quad (\text{người})$$

Theo đề mỗi xe nhỏ chở ít hơn mỗi xe lớn là 12 người, nên ta có phương trình:

$$\frac{210}{x-2} - \frac{210}{x} = 12$$

$$\Leftrightarrow 210x - 210(x-2) = 12x(x-2)$$

$$\Leftrightarrow 210x - 210x + 420 = 12x^2 - 24x$$

$$\Leftrightarrow 12x^2 - 24x - 420 = 0$$

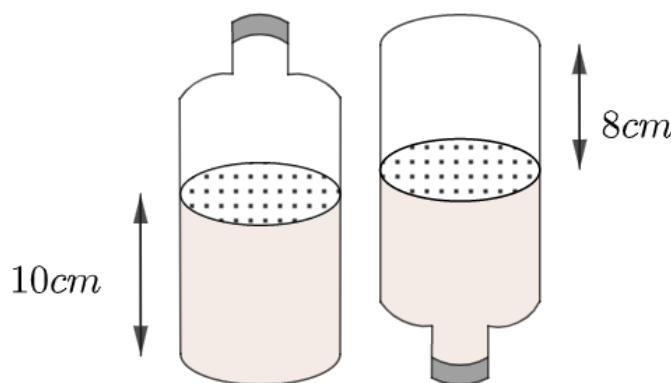
$$\Leftrightarrow 12(x-7)(x+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-7=0 \\ x+5=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=7 & (\text{Nhận}) \\ x=-5 & (\text{Loại}) \end{cases}$$

Vậy công ty đã thuê 7 chiếc xe nhỏ.

Bài 5. (0,5 điểm) Một cái chai có chứa một lượng nước, phần chứa nước là hình trụ có chiều cao 10 cm, khi lật ngược chai lại thì phần không chứa nước cũng là một hình trụ có chiều cao 8 cm (như hình vẽ bên. Biết thể tích của chai là $450\pi \text{ cm}^3$. Tính bán kính của đáy chai (giả sử độ dày của thành chai và đáy chai không đáng kể).



Lời giải

Gọi R (cm) là bán kính đáy chai. ($R > 0$)

Thể tích nước trong chai (hình trụ có chiều cao 10 cm) là:

$$V_1 = \pi R^2 \cdot h_1 = 10\pi R^2 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Thể tích không chứa nước trong chai khi lật ngược chai (hình trụ có chiều cao 8 cm) là:

$$V_2 = \pi R^2 \cdot h_2 = 8\pi R^2 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Thể tích của chai ($450\pi \text{ cm}^3$) là tổng thể tích của nước và phần không chứa nước trong chai khi lật ngược chai lại, nên ta có: $V_1 + V_2 = 450\pi$

$$\Leftrightarrow 10\pi R^2 + 8\pi R^2 = 450\pi$$

$$\Leftrightarrow 18\pi R^2 = 450\pi$$

$$\Leftrightarrow R^2 = 25$$

$$\Rightarrow R = 5 \text{ (Do } R > 0\text{)}$$

Vậy bán kính của đáy chai là 5 cm .

Bài 6. (2,0 điểm) Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài đường tròn từ A , vẽ hai tiếp tuyến AB, AC (B, C là hai tiếp điểm).

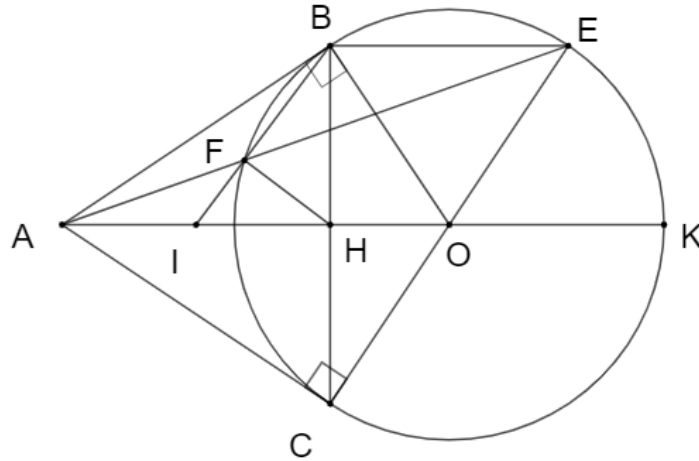
a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

b) Vẽ đường kính CE , nối AE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F .

Chứng minh $AB^2 = AE \cdot AF$.

c) Cho OA cắt BC tại H , BF cắt OA tại I . Chứng minh I là trung điểm của AH .

Lời giải



a) Xét tứ giác $ABOC$ có:

$ABO = ACO = 90^\circ$ (AB, AC lần lượt là tiếp tuyến tại B, C của (O))

$\Rightarrow ABO + ACO = 180^\circ$

Vậy tứ giác $ABOC$ nội tiếp (Hai góc đối bù nhau)

b) Xét $\triangle ABF$ và $\triangle AEB$ có:

$\angle BAF$ là góc chung

$\angle ABF = \angle AEB \left(= \frac{1}{2} \text{ số đo } \widehat{AF} \text{ của } (O) \right)$

Do đó $\triangle ABF \sim \triangle AEB$ (g - g)

$\Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{AE}{AB}$ (tính chất hai tam giác đồng dạng)

$\Rightarrow AB^2 = AE \cdot AF$

c) Xét (O) có AB, AC lần lượt là tiếp tuyến tại B, C của (O) , $OA \cap BC = H$

$\Rightarrow OA \perp BC$ tại H

Xét $\triangle ABO$ vuông tại B , đường cao BH , ta có:

$AB^2 = AH \cdot AO$

Do đó $AE \cdot AF = AH \cdot AO \left(= AB^2 \right)$

$\Rightarrow \frac{AE}{AH} = \frac{AO}{AF}$

Xét $\triangle AEO$ và $\triangle AHF$, ta có:

HAF là góc chung

$$\frac{AE}{AH} = \frac{AO}{AF}$$

Do đó $\triangle AEO \sim \triangle AHF$ (c – g – c)

$\Rightarrow \angle AEO = \angle AHF$ (Hai góc tương ứng)

Mà $\angle AHF + \angle FHO = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

nên $\angle AEO + \angle FHO = 180^\circ$ hay $\angle FEO + \angle FHO = 180^\circ$

Suy ra tứ giác $OHFE$ nội tiếp (Hai góc đối bù nhau)

$\Rightarrow \angle HFE + \angle HOE = 180^\circ$ (Tính chất tứ giác nội tiếp)

Kéo dài AO cắt (O) tại K (O nằm giữa A và K ta có: $\angle KOE + \angle HOE = 180^\circ$)

$\Rightarrow \angle KOE = \angle HFE$ (Cùng bù $\angle HOE$)

Xét (O) , ta có:

$\angle EBC = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow EB \perp BC$

Mặt khác, ta có: $\Rightarrow OA \perp BC$ tại H (cmt) $\Rightarrow AK \perp BC$

Do đó: $EB \parallel AK$ (cùng vuông góc với BC) $\Rightarrow \angle KOE = \angle OEB$ (Hai góc so le trong)

$\Rightarrow \angle KOE = \angle CEB$

Suy ra $\angle HFE = \angle CEB$ ($= \angle KOE$)

Xét (O) , ta có: $\angle BFE = \angle BCE$ $\left(= \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{BE} \text{ của } (O) \right)$

Trong $\triangle EBC$ vuông tại B , ta có: $\angle BEC + \angle BCE = 90^\circ$

Ta có:

$\angle BFH = \angle BFE + \angle HFE = \angle BCE + \angle BEC = 90^\circ \Rightarrow HF \perp BI$ tại F

Xét $\triangle BHI$ vuông tại H , đường cao HF , ta có:

$$IH^2 = IF \cdot IB \quad (1)$$

Xét $\triangle IAF$ và $\triangle IBA$, ta có:

$\angle AIF$ là góc chung

$\angle IBA = \angle IAF$ ($\angle IBA = \angle BEF$ cùng chắn cung BF của (O) , $\angle BEF = \angle IAF$ là hai góc so le trong của $EB \parallel AK$)

Vậy $\triangle IAF \sim \triangle IBA$ (g – g)

$$\Rightarrow \frac{IA}{IB} = \frac{IF}{IA}$$

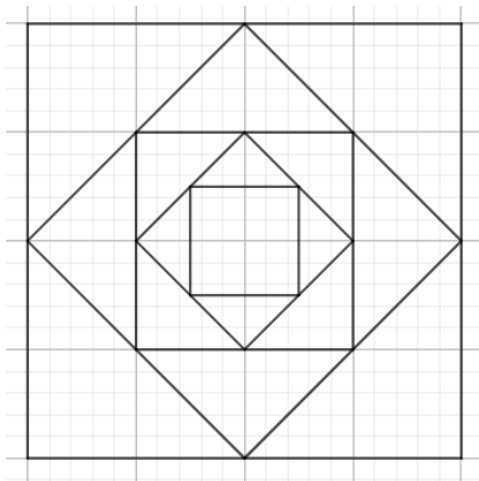
$$\Rightarrow IA^2 = IF \cdot IB \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow IH^2 = IA^2$

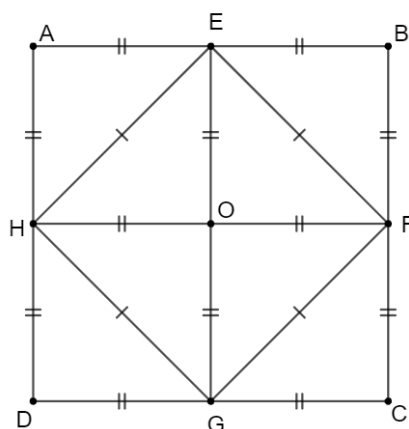
$\Rightarrow IH = IA$ hay I là trung điểm AH

Bài 7. (0,5 điểm) Từ hình vuông đầu tiên, bạn Hùng vẽ hình vuông thứ hai có các đỉnh là trung điểm

của các cạnh hình vuông thứ nhất, vẽ tiếp hình vuông thứ ba có các đỉnh là trung điểm của các cạnh hình vuông thứ hai và cứ tiếp tục như vậy (xem hình minh họa bên). Giả sử hình vuông thứ bảy có diện tích bằng 32 cm^2 . Tính diện tích hình vuông thứ năm.



Lời giải



Nhận xét:

Xét hình vuông $ABCD$, gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA .

Khi đó hình vuông $EFGH$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh hình vuông $ABCD$

Dễ dàng nhận thấy

$\triangle AEH = \triangle BEH = \triangle CGF = \triangle DGH = \triangle OEH = \triangle OEF = \triangle OGF = \triangle OHG$ ($c - c - c$) (hoặc trường hợp hai cạnh góc vuông)

Do đó $S_{ABCD} = 8.S_{\triangle OHG}$, $S_{EFGH} = 4.S_{\triangle OHG}$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{EFGH}$$

Quay lại bài toán, gọi $S_1; S_2; S_3; S_4; S_5; S_6; S_7$ lần lượt là diện tích của các hình vuông 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7

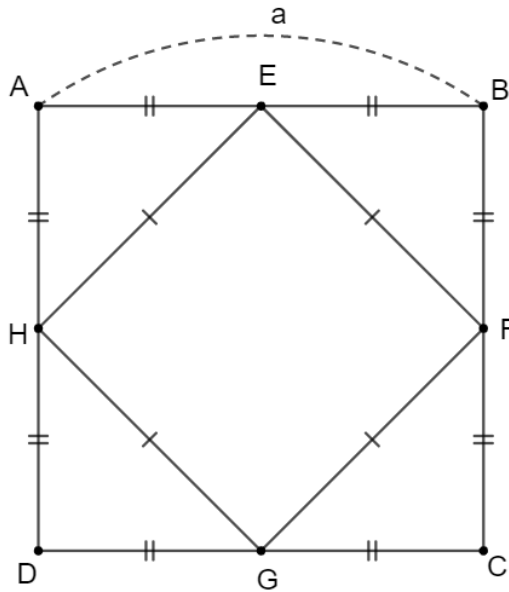
Theo nhận xét, ta có: Diện tích hình vuông bất kì bằng hai lần diện tích hình vuông có các đỉnh là trung điểm của các cạnh hình vuông đã cho.

Do đó ta có:

$$S_5 = 2S_6 = 2.2S_7 = 4S_7 = 4.32 = 128 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vậy diện tích hình vuông thứ 5 là 128 cm^2

Cách khác:



Nhận xét:

Xét hình vuông $ABCD$ có cạnh là a . Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA .

Khi đó hình vuông $EFGH$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh hình vuông $ABCD$.

$$EF = \sqrt{BE^2 + BF^2} = \sqrt{\left(\frac{BA}{2}\right)^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}a}{2}$$

$$\text{Khi đó } \frac{S_{ABCD}}{S_{EFGH}} = \frac{AB^2}{EF^2} = \frac{a^2}{\frac{a^2}{2}} = 2$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{EFGH}.$$

Quay lại bài toán, gọi $S_1; S_2; S_3; S_4; S_5; S_6; S_7$ lần lượt là diện tích của các hình vuông 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7

Theo nhận xét, ta có: Diện tích hình vuông bất kì bằng hai lần diện tích hình vuông có các đỉnh là trung điểm của các cạnh hình vuông đã cho.

Do đó ta có:

$$S_5 = 2S_6 = 2.2S_7 = 4S_7 = 4.32 = 128 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vậy diện tích hình vuông thứ 5 là 128 cm^2

----- **Hết** -----