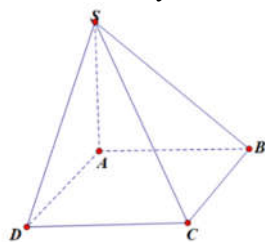


-----  
(Đề thi có 4 trang)

Họ và tên: ..... Số báo danh: ..... Mã đề 0101

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật và  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

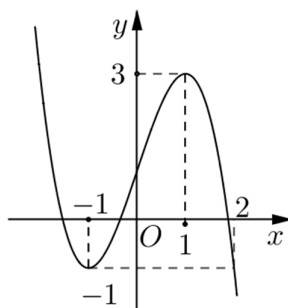


- A.  $SA \perp (ABCD)$ . B.  $AB \perp (SAD)$ . C.  $BD \perp (SAC)$ . D.  $BC \perp (SAB)$ .

**Câu 2.** Nghiệm của phương trình  $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) = 0$  là

- A.  $x = \frac{1}{2}$ . B.  $x = 1$ . C.  $x = \frac{2}{3}$ . D.  $x = \frac{3}{4}$ .

**Câu 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị

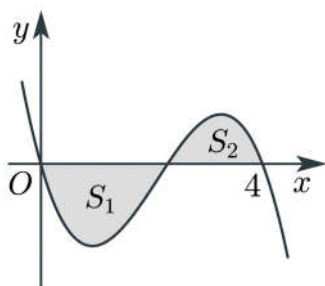


Giá trị cực đại của hàm số đã cho là

- A.  $x = 1$ . B.  $x = -1$ . C.  $y = 3$ . D.  $y = -1$ .

**Câu 4.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ bên dưới:

Biết rằng các diện tích  $S_1, S_2$  thỏa mãn  $S_1 = 2S_2 = 3$ . Tính  $\int_0^4 f(x)dx$ .



- A.  $\frac{3}{2}$ . B. 3. C.  $-\frac{3}{2}$ . D.  $\frac{9}{2}$ .

**Câu 5.** Nếu  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$  thì giá trị của biểu thức  $P = (1 + 3 \cos 2\alpha)(2 - 3 \cos 2\alpha)$  bằng:

A.  $\frac{11}{9}$

B.  $-\frac{10}{9}$

C.  $\frac{10}{9}$

D.  $-\frac{11}{9}$

**Câu 6.** Cho tứ diện đều  $ABCD$  có độ dài cạnh bằng  $a$ , gọi  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $CD$ . Tích vô hướng  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB}$  bằng

A.  $a^2$ .

B.  $\frac{a^2}{2}$ .

C.  $\frac{a^2}{3}$ .

D.  $\frac{a^2}{4}$ .

**Câu 7.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|      |           |           |       |           |
|------|-----------|-----------|-------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | 0         | 3     | $+\infty$ |
| $y'$ | -         |           | - 0 + |           |
| $y$  | 0         | $+\infty$ | -3    | 3         |

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

**Câu 8.** Nếu  $\int_0^3 f(x) dx = 6$  thì  $\int_0^3 \left[ \frac{1}{3} f(x) + 2 \right] dx$  bằng

A. 6.

B. 4.

C. 5.

D. 8.

**Câu 9.** Khảo sát thời gian tập thể dục trong một tuần của 50 học sinh (đơn vị: phút), ta thu được bảng số liệu ghép nhóm sau:

|           |            |             |              |              |              |
|-----------|------------|-------------|--------------|--------------|--------------|
| Thời gian | $[60; 90)$ | $[90; 120)$ | $[120; 150)$ | $[150; 180)$ | $[180; 210)$ |
| Tần số    | 8          | 15          | 12           | 10           | 5            |

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là

A. 94,5

B. 105

C. 112

D. 99

**Câu 10.** Trong không gian với hệ toạ độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-1; 1; 0)$  và  $B(0; 1; -2)$ . Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng  $AB$ ?

A.  $\vec{u} = (1; 0; -2)$

B.  $\vec{u} = (1; 2; -2)$

C.  $\vec{u} = (-1; 0; -2)$

D.  $\vec{u} = (-1; 1; 0)$

**Câu 11.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(0; 1; 0)$ ,  $B(3; 0; 0)$  và  $C(0; 0; -2)$ . Mặt phẳng  $(ABC)$  có phương trình là:

A.  $\frac{x}{3} + \frac{y}{1} - \frac{z}{2} = 0$ .

B.  $\frac{x}{1} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-2} = 1$ .

C.  $\frac{x}{1} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$ .

D.  $\frac{x}{3} + \frac{y}{1} - \frac{z}{2} = 1$ .

**Câu 12.** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  có số hạng đầu  $u_1 = 3$  công bội  $q = \frac{1}{2}$ . Hỏi  $\frac{3}{64}$  là số hạng thứ mấy?

A. 6.

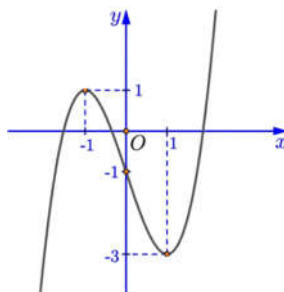
B. 9.

C. 8.

D. 7.

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1.** Cho hàm số bậc ba  $f(x) = x^3 - 3x - 1$ .



a) Đạo hàm  $f'(x) = 3x^2 - 3x$ .

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-1; 1)$ .

c) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm  $I(0; -1)$ .

d) Đồ thị  $(C)$  của hàm số đã cho có dạng như hình vẽ.

**Câu 2.** Trong một cơ sở chế biến nông sản, tốc độ rút nước của một hệ thống sấy lạnh sau khi khởi động có xu hướng giảm dần theo thời gian và tiến về mức ổn định. Giả sử sau khi bắt đầu vận hành được  $t$  giờ, tốc độ rút nước của hệ thống này được mô hình bởi hàm số  $W'(t) = A + 3e^{-0,2t}$  (đơn vị: kg/giờ) với  $0 \leq t \leq 10$ , trong đó  $W(t)$  (kg) là lượng nước tổng cộng được rút ra tính từ lúc bắt đầu vận hành. Biết rằng trong 10 giờ đầu tiên, hệ thống đã rút được tổng cộng 65 kg nước.

a)  $W(t) = At - 15e^{-0,2t} + 15$ .

b)  $A = 5$  (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

c) Lượng nước hệ thống rút được trong 5 giờ đầu tiên nhỏ hơn 35 kg.

d) Tốc độ rút nước trung bình của hệ thống trong 5 giờ cuối (từ giờ thứ 5 đến khi kết thúc) bằng 5,9 kg/giờ (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

**Câu 3.** Một gian hàng thời trang (chuyên quần áo, giày dép) trên TikTok Shop đang diễn ra phiên livestream MEGA Sale. Qua theo dõi dữ liệu người xem, hệ thống phân tích thống kê được có 40% người xem có hành động "click vào giỏ hàng". Trong số những người đã click vào giỏ hàng, có 75% người xem quyết định chốt đơn (mua các sản phẩm quần áo, giày dép). Ngược lại, trong số những người xem không click vào giỏ hàng, chỉ có 15% người chốt đơn. Chọn ngẫu nhiên một người xem phiên livestream đó.

a) Xác suất để người xem đó có chốt đơn là 0,39.

b) Xác suất để người xem đó từng click vào giỏ hàng, biết rằng họ đã chốt đơn bằng  $\frac{10}{13}$ .

c) Xác suất để người xem đó không chốt đơn, biết rằng họ có click vào giỏ hàng bằng 0,85.

d) Từ danh sách những khách hàng không chốt đơn, chọn ngẫu nhiên 3 người. Xác suất để có ít nhất một người trong số đó từng "click vào giỏ hàng" nhỏ hơn 42%.

**Câu 4.** Tại một khu nông trường công nghệ cao, người ta lắp đặt một bồn chứa dung dịch thủy canh có dạng hình cầu  $(S)$ . Để kiểm tra bề mặt của bồn chứa, một thiết bị bay không người lái (flycam) được lập trình để bay đến lơ lửng tại vị trí  $A$ . Từ  $A$ , flycam phát ra các tia quét laser để dò tìm lỗi bề mặt. Các tia quét này chạm (tiếp xúc) với bề mặt bồn chứa tại các điểm  $M$ . Sau khi hoàn thành thao tác quét tại  $A$ , flycam được lập trình bay thẳng về trạm sạc theo một quỹ đạo là đường thẳng  $d$ .

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  (đơn vị tính bằng mét), giả sử bồn chứa hình cầu có phương trình  $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 9$ , vị trí lơ lửng ban đầu của flycam là  $A(2; -2; 3)$  và quỹ đạo bay về trạm

sạc nằm trên đường thẳng  $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{3}$ .

a) Bồn chứa dung dịch  $(S)$  có tâm định vị tại  $I(2; 1; -1)$  và bán kính là  $R = 9$  mét.

b) Chiều dài của mọi tia quét laser từ flycam đến các điểm tiếp xúc  $M$  trên bồn chứa luôn không đổi và bằng 4 mét.

c) Quỹ đạo bay về trạm sạc  $d$  của flycam được thiết lập an toàn, hoàn toàn không có rủi ro đâm va vào bồn chứa  $(S)$ .

d) Tập hợp tất cả các điểm  $M$  mà tia laser quét tới trên bề mặt bồn chứa là một đường tròn có tâm  $H(a; b; c)$ . Giá trị của tổng  $a + b + c$  bằng 2,36.

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

**Câu 1.** Một xưởng mộc sản xuất hai loại sản phẩm: Bàn làm việc (loại I) và Bàn trang điểm (loại II).

Sản xuất 1 bàn loại I cần 2 khối gỗ A, 3 khối gỗ B và đem lại lợi nhuận 3 triệu đồng.

Sản xuất 1 bàn loại II cần 4 khối gỗ A, 2 khối gỗ B và đem lại lợi nhuận 5 triệu đồng.

Hiện tại, kho của xưởng chỉ còn 41 khối gỗ A và 39 khối gỗ B. Hỏi tổng lợi nhuận lớn nhất mà xưởng có thể đạt được là bao nhiêu triệu đồng?

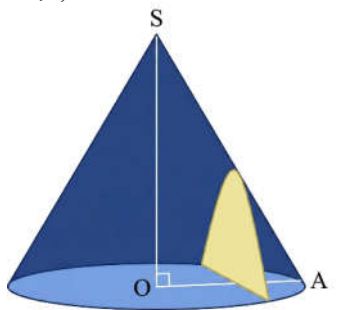
**Câu 2.** Cho khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có  $AC' = 12$ , diện tích của tam giác  $A'BC$  bằng 10 và đường thẳng  $AC'$  tạo với mặt phẳng  $(A'BC)$  một góc  $30^\circ$ . Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng bao nhiêu?

**Câu 3.** Trong một căn phòng (được mô phỏng bởi hệ tọa độ  $Oxyz$  với đơn vị độ dài là đề-xi-mét), người ta có treo một quả cầu trang trí với phương trình bề mặt là  $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$ . Một con nhện đang phục kích ở vị trí  $T(-1; 2; -10)$  trên trần nhà, nó phát hiện ra một con muỗi đang đậu trên bề mặt

quả cầu tại vị trí  $M(-1; -3; 3)$ . Nó quyết định tấn công bằng cách thả tơ rơi thẳng xuống, chạm vào bề mặt quả cầu ( $S$ ) tại một điểm  $P$  (biết đường thẳng  $TP$  là tiếp tuyến của mặt cầu). Ngay khi chạm vào quả cầu, nhện lập tức bò trên bề mặt ( $S$ ) bằng con đường ngắn nhất để bắt con muỗi. Biết tốc độ đu tơ của nhện là  $4 \text{ dm/s}$  và tốc độ bò trên bề mặt quả cầu là  $1,5 \text{ dm/s}$ . Hãy tính thời gian ngắn nhất (giây) kể từ lúc nhện bắt đầu thả tơ cho đến khi bắt được muỗi. (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

**Câu 4.** Một hợp tác xã nông nghiệp cần phân phối một lô thùng sầu riêng (các thùng được đóng gói tiêu chuẩn giống hệt nhau) đến 4 đại lý bán lẻ trên địa bàn. Để đảm bảo điều kiện bảo quản trong kho lạnh, mỗi đại lý phải nhận tối thiểu 6 thùng và tối đa 12 thùng. Biết rằng hợp tác xã dự kiến xuất kho tổng cộng từ 30 đến 42 thùng. Gọi  $T$  là số cách hợp tác xã phân phối lô sầu riêng này đến các đại lý. Tìm  $T$ .

**Câu 5.** Cho hình nón  $\mathcal{H}$  có bán kính đáy  $OA = 6 \text{ cm}$  và chiều cao  $SO = 10 \text{ cm}$ . Cắt hình nón đã cho bởi mặt phẳng ( $P$ ) song song với trục  $SO$  và cách trục  $SO$  một khoảng bằng  $3 \text{ cm}$  ta được hai phần. Thể tích phần không chứa đỉnh  $S$  bằng bao nhiêu  $\text{cm}^3$ ? (Không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần chục).



**Câu 6.** Anh Công dự định làm một chiếc bể cá hình hộp chữ nhật không có nắp bằng vật liệu kính. Biết rằng đáy bể có thiết kế chiều dài gấp ba lần chiều rộng. Kinh phí tối đa anh Công có thể chi trả để mua kính làm các mặt bể là  $3600000$  đồng và giá kính ghép bể hiện tại là  $400000$  đồng/ $\text{m}^2$ . Hỏi thể tích nước lớn nhất mà chiếc bể cá có thể chứa được là bao nhiêu mét khối? (Xem độ dày của kính là không đáng kể và không tính phần vật liệu hao hụt khi dán keo).

----- HẾT -----

| Câu |      |
|-----|------|
| 1   | C    |
| 2   | B    |
| 3   | C    |
| 4   | C    |
| 5   | B    |
| 6   | B    |
| 7   | C    |
| 8   | D    |
| 9   | D    |
| 10  | A    |
| 11  | D    |
| 12  | D    |
| 1a  | S    |
| 1b  | D    |
| 1c  | D    |
| 1d  | D    |
| 2a  | D    |
| 2b  | D    |
| 2c  | S    |
| 2d  | D    |
| 3a  | D    |
| 3b  | D    |
| 3c  | S    |
| 3d  | D    |
| 4a  | S    |
| 4b  | D    |
| 4c  | D    |
| 4d  | D    |
| 1   | 54   |
| 2   | 30   |
| 3   | 4,32 |
| 4   | 2149 |
| 5   | 41,5 |
| 6   | 2,25 |

## HƯỚNG DẪN GIẢI

*Được thực hiện bởi AI Gemini Pro*

### **PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

**Câu 1.** Chọn C.

Lời giải chi tiết: Theo giả thiết,  $SA \perp (ABCD)$  nên mệnh đề A đúng.

Vì  $ABCD$  là hình chữ nhật nên  $AB \perp AD$ . Mặt khác,  $AB \perp SA$  (do  $SA \perp (ABCD)$ ). Suy ra  $AB \perp (SAD)$ , mệnh đề B đúng.

Tương tự,  $BC \perp AB$  và  $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB)$ , mệnh đề D đúng.

Vì  $ABCD$  là hình chữ nhật nên hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  không vuông góc với nhau (trừ trường hợp hình vuông). Do đó  $BD$  không vuông góc với  $(SAC)$ , mệnh đề C sai.

**Câu 2.** Chọn B.

Lời giải chi tiết: Điều kiện xác định:  $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$ .

Phương trình tương đương:  $2x - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 1 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$  (thỏa mãn điều kiện).

**Câu 3.** Chọn C.

Lời giải chi tiết: Dựa vào đồ thị hàm số, điểm cực đại của đồ thị là điểm  $(1; 3)$ .

Do đó, giá trị cực đại của hàm số đã cho là  $y = 3$ .

**Câu 4.** Chọn C.

Lời giải chi tiết: Từ đồ thị ta thấy trên đoạn  $[0; 4]$ , đồ thị hàm số  $y = f(x)$  cắt trục hoành tại một điểm có hoành độ  $c \in (0; 4)$ .

Phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị và trục hoành từ 0 đến  $c$  nằm phía dưới trục hoành và có diện tích  $S_1 = 3 \Rightarrow \int_0^c f(x)dx = -3$ .

Phần hình phẳng từ  $c$  đến 4 nằm phía trên trục hoành và có diện tích  $S_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow \int_c^4 f(x)dx = \frac{3}{2}$ .

Vậy  $\int_0^4 f(x)dx = \int_0^c f(x)dx + \int_c^4 f(x)dx = -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$ .

**Câu 5.** Chọn B.

Lời giải chi tiết: Ta có công thức nhân đôi:  $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}$ .

Thay vào biểu thức  $P$  :

$$P = (1 + 3 \cdot \frac{7}{9})(2 - 3 \cdot \frac{7}{9}) = \left(1 + \frac{7}{3}\right)\left(2 - \frac{7}{3}\right) = \frac{10}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{10}{9}$$

**Câu 6.** Chọn B.

Lời giải chi tiết: Vì  $M$  là trung điểm của  $CD$  nên  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$ .

Tích vô hướng cần tính:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB})$$

Do  $ABCD$  là tứ diện đều cạnh  $a$  nên các tam giác  $ABC$  và  $ABD$  là các tam giác đều cạnh  $a$ . Suy ra  $BAC = BAD = 60^\circ$ .

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2} \text{ và } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \left( \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} \right) = \frac{a^2}{2}.$$

**Câu 7.** Chọn C.

Lời giải chi tiết: Tiệm cận đứng: Khi  $x \rightarrow 0^+$ , ta có  $y \rightarrow +\infty \Rightarrow x = 0$  là một đường tiệm cận đứng.

Tiệm cận ngang: Khi  $x \rightarrow -\infty$ , ta có  $y \rightarrow 0 \Rightarrow y = 0$  là một đường tiệm cận ngang. Khi  $x \rightarrow +\infty$ , ta có  $y \rightarrow 3 \Rightarrow y = 3$  là một đường tiệm cận ngang nữa.

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là  $1 + 2 = 3$ .

**Câu 8.** Chọn D.

Lời giải chi tiết: Áp dụng tính chất của tích phân:

$$\int_0^3 \left[ \frac{1}{3} f(x) + 2 \right] dx = \frac{1}{3} \int_0^3 f(x) dx + \int_0^3 2 dx = \frac{1}{3} \cdot 6 + 2 \cdot (3 - 0) = 2 + 6 = 8$$

**Câu 9.** Chọn D.

Lời giải chi tiết: Tổng số học sinh là  $n = 50$ . Vị trí của tứ phân vị thứ nhất  $Q_1$  là  $\frac{n}{4} = \frac{50}{4} = 12.5$ .

Tần số tích lũy của nhóm 1  $[60; 90)$  là 8. Tần số tích lũy của nhóm 2  $[90; 120)$  là  $8 + 15 = 23$ . Vì  $8 < 12.5 \leq 23$  nên nhóm chứa  $Q_1$  là nhóm thứ hai:  $[90; 120)$ .

Áp dụng công thức:  $Q_1 = L + \left( \frac{\frac{n}{4} - C}{f} \right) \cdot h = 90 + \left( \frac{12.5 - 8}{15} \right) \cdot 30 = 90 + 9 = 99.$

**Câu 10.** Chọn A.

Lời giải chi tiết: Một vector chỉ phương của đường thẳng  $AB$  chính là vector  $\overrightarrow{AB}$ .

Ta có:  $\overrightarrow{AB} = (0 - (-1); 1 - 1; -2 - 0) = (1; 0; -2).$

**Câu 11.** Chọn D.

Lời giải chi tiết: Ba điểm  $B(3; 0; 0) \in Ox$ ,  $A(0; 1; 0) \in Oy$ ,  $C(0; 0; -2) \in Oz$ .

Phương trình mặt phẳng  $(ABC)$  theo đoạn chắn là:  $\frac{x}{3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{-2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{1} - \frac{z}{2} = 1.$

**Câu 12.** Chọn D.

Lời giải chi tiết: Số hạng tổng quát của cấp số nhân là  $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}.$

Thay số vào ta có:  $\frac{3}{64} = 3 \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} \Leftrightarrow \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} = \frac{1}{64} = \left( \frac{1}{2} \right)^6 \Leftrightarrow n-1 = 6 \Leftrightarrow n = 7.$

## **PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.**

**Câu 1.**

**a)** Sai: Ta có  $f'(x) = 3x^2 - 3$ . Phát biểu ghi  $3x^2 - 3x$  là sai.

**b)** Đúng:  $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ . Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-1; 1)$ .

**c)** Đúng: Ta có  $f''(x) = 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = -1$ . Tâm đối xứng của đồ thị hàm số bậc ba là điểm uốn  $I(0; -1)$ .

**d)** Đúng: Đồ thị hàm số đi qua các điểm cực trị  $(-1; 1)$ ,  $(1; -3)$  và cắt trục tung tại  $(0; -1)$ , có dạng đồ thị của hàm số bậc ba với hệ số  $a > 0$  hoàn toàn chính xác với hình vẽ.

**Câu 2.**

**a)** Đúng: Ta có  $W(t) = \int (A + 3e^{-0.2t}) dt = At - 15e^{-0.2t} + C$ . Vì  $W(0) = 0 \Rightarrow -15 + C = 0 \Rightarrow C = 15$ . Vậy  $W(t) = At - 15e^{-0.2t} + 15$ .

**b)** Đúng: Lượng nước rút sau 10 giờ là

$W(10) = 65 \Leftrightarrow 10A - 15e^{-2} + 15 = 65 \Rightarrow 10A = 50 + 15e^{-2} \approx 52.03 \Rightarrow A \approx 5.2$ . Làm tròn đến hàng đơn vị ta được  $A = 5$ .

c) Sai: Với  $A \approx 5.203$ , lượng nước rút trong 5 giờ đầu là:

$$W(5) = 5.203 \cdot 5 - 15e^{-1} + 15 \approx 35.5 \text{ kg} > 35 \text{ kg}.$$

d) Đúng: Lượng nước rút trong 5 giờ cuối là:  $\Delta W = W(10) - W(5) = 65 - 35.5 = 29.5 \text{ kg}$ . Tốc độ trung bình là  $\frac{29.5}{5} = 5.9 \text{ kg/gi}$ .

### Câu 3.

a) Đúng: Gọi  $A$  là biến cố "Click vào giỏ hàng",  $B$  là biến cố "Chốt đơn".

$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A}) = 0.4 \cdot 0.75 + 0.6 \cdot 0.15 = 0.39$$

b) Đúng: Áp dụng công thức Bayes:  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.4 \cdot 0.75}{0.39} = \frac{30}{39} = \frac{10}{13}$ .

c) Sai: Xác suất cần tính là  $P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A) = 1 - 0.75 = 0.25$ .

d) Đúng: Xác suất một người không chốt đơn từng click vào giỏ hàng là

$$P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0.4 \cdot 0.25}{1 - 0.39} = \frac{10}{61}.$$
 Xác suất để trong 3 người không chốt đơn có ít nhất một người từng click vào giỏ hàng là  $1 - \left(1 - \frac{10}{61}\right)^3 \approx 41.56\% < 42\%$ .

### Câu 4.

a) Sai: Bán kính mặt cầu là  $R = \sqrt{9} = 3 \text{ m}$  chứ không phải  $9 \text{ m}$ .

b) Đúng: Khoảng cách từ flycam  $A(2; -2; 3)$  đến tâm  $I(2; 1; -1)$  là  $AI = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-4)^2} = 5 \text{ m}$ .

Chiều dài tia quét chính là độ dài đoạn tiếp tuyến  $AM = \sqrt{AI^2 - R^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ m}$ .

c) Đúng: Đường thẳng  $d$  đi qua  $A$  có vector chỉ phương  $\vec{u} = (1; 4; 3)$ . Ta có

$$\vec{AI} = (0; 3; -4) \Rightarrow [\vec{AI}, \vec{u}] = (25; -4; -3).$$
 Khoảng cách từ tâm  $I$  đến  $d$  là

$$d(I, d) = \frac{|[\vec{AI}, \vec{u}]|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{25^2 + (-4)^2 + (-3)^2}}{\sqrt{1^2 + 4^2 + 3^2}} = 5 \text{ m}.$$
 Vì  $d(I, d) = 5 > R = 3$  nên quỹ đạo an toàn, không

va chạm bồn chứa.

d) Đúng: Tâm  $H$  là hình chiếu của  $M$  trên đoạn  $AI$ , thỏa mãn

$$IH = \frac{R^2}{AI} = \frac{9}{5} = 1.8 \Rightarrow \vec{IH} = \frac{1.8}{5} \vec{IA} = \frac{9}{25} \vec{IA}.$$
 Tính ra được tọa độ  $H(2; -0.08; 0.44) \Rightarrow a + b + c = 2.36$ .

## PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

### Câu 1.

Đáp số: 54

Lời giải chi tiết: Gọi  $x, y$  lần lượt là số lượng bàn loại I và loại II được sản xuất ( $x, y \in \mathbb{N}$ ). Hệ bất phương trình giới hạn lượng gỗ là:

$$\begin{cases} 2x + 4y \leq 41 \\ 3x + 2y \leq 39 \end{cases}$$

Hàm lợi nhuận cần tối ưu là  $F(x, y) = 3x + 5y$ . Vì  $x, y$  là các số nguyên, ta lần lượt thử các giá trị của  $y$  từ lớn đến nhỏ:

Với  $y = 10 \Rightarrow 2x \leq 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow F = 50$ .

Với  $y = 9 \Rightarrow 2x \leq 5 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow$  kiểm tra ĐK2 thỏa mãn  $\Rightarrow F = 3(2) + 5(9) = 51$ .

Tương tự thử tiếp ta thấy tại  $y = 6 \Rightarrow 2x \leq 17 \Rightarrow x \leq 8 \Rightarrow$  kiểm tra ĐK2:  $3(8) + 2(6) = 36 \leq 39$  (thỏa mãn)  $\Rightarrow F = 3(8) + 5(6) = 54$ .

Các bộ số khác đều cho lợi nhuận thấp hơn. Vậy tổng lợi nhuận lớn nhất là 54 triệu đồng.

### Câu 2.

Đáp số: 30

Lời giải chi tiết: Trong hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$ , đường chéo  $AC'$  cắt mặt phẳng  $(A'BC)$  tại trung điểm  $O$  của  $AC'$  và  $A'C$ .

Do đó,  $AO = \frac{1}{2} AC' = 6$ .

Khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng  $(A'BC)$  là:  $d(A, (A'BC)) = AO \cdot \sin 30^\circ = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$ .

Thể tích khối chóp  $A.A'BC$  là:  $V_{A.A'BC} = \frac{1}{3} \cdot d(A, (A'BC)) \cdot S_{\Delta A'BC} = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 10 = 10$ .

Mà thể tích khối chóp  $A'.ABC$  bằng thể tích khối chóp  $A.A'BC$  và bằng  $\frac{1}{3}$  thể tích khối lăng trụ.

Vậy thể tích khối lăng trụ là:  $V = 3 \cdot 10 = 30$ .

### Câu 3.

Đáp số: 4.32

Lời giải chi tiết:

Quả cầu có tâm  $I(-1; 2; 3)$ , bán kính  $R = 5$ . Nhện ở  $T(-1; 2; -10)$  nên  $TI = 13$  dm.

Đoạn đu tơ tiếp tuyến  $TP = \sqrt{TI^2 - R^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$  dm. Thời gian đu tơ là  $t_1 = \frac{12}{4} = 3$  s.

Xét góc  $\beta = PIT$  trong tam giác vuông  $TPI$ , ta có  $\cos \beta = \frac{5}{13}$ .

Vì  $M(-1; -3; 3) \Rightarrow \overline{IM} = (0; -5; 0)$  vuông góc với  $\overline{IT} = (0; 0; -13) \Rightarrow TIM = 90^\circ$ .

Đường đi ngắn nhất trên mặt cầu từ  $P$  đến  $M$  tương ứng với góc

$$\alpha = PIM = 90^\circ - \beta \Rightarrow \sin \alpha = \cos \beta = \frac{5}{13} \Rightarrow \alpha \approx 0.3948 \text{ rad}.$$

Độ dài cung bờ ngắn nhất:  $s = R \cdot \alpha = 5 \cdot 0.3948 = 1.974 \text{ dm}$ . Thời gian bờ là  $t_2 = \frac{1.974}{1.5} \approx 1.32 \text{ s}$ .

Tổng thời gian ngắn nhất:  $t = 3 + 1.32 = 4.32 \text{ s}$ .

#### Câu 4.

Đáp số: 2149

Lời giải chi tiết: Gọi  $x_i$  là số thùng của đại lý  $i$  ( $6 \leq x_i \leq 12$ ). Đặt  $y_i = x_i - 6 \Rightarrow 0 \leq y_i \leq 6$ .

Bài toán đưa về tìm số nghiệm của bài toán chia kẹo Euler thỏa mãn  $6 \leq y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 18$  với  $0 \leq y_i \leq 6$ .

Tổng số bộ nghiệm không giới hạn tổng là  $7^4 = 2401$ .

Số bộ nghiệm có tổng  $\leq 5$  là  $C_{5+4}^4 = C_9^4 = 126$ . Do tính đối xứng, số bộ nghiệm có tổng  $\geq 19$  (tức là từ 19 đến 24) cũng là 126.

Số cách phân phối hợp lệ:  $T = 2401 - 126 - 126 = 2149$ .

#### Câu 5.

Đáp số: 41.5

Lời giải chi tiết: Cắt hình nón bằng các lát cắt nằm ngang song song với đáy tại độ cao  $z$  ( $0 \leq z \leq 5$ ).

Bán kính lát cắt tương ứng là  $r(z) = 6 \left( 1 - \frac{z}{10} \right) = 6 - 0.6z$ .

Mặt phẳng cách trục một khoảng  $d = 3 \text{ cm}$ . Diện tích mặt cắt viên phân tại độ cao  $z$  là:

$$A(z) = r^2 \arccos\left(\frac{3}{r}\right) - 3\sqrt{r^2 - 9}.$$

Thể tích phần không chứa đỉnh  $S$  thu được qua tích phân:  $V = \int_0^5 A(z) dz \approx 41.5 \text{ cm}^3$ .

#### Câu 6.

Đáp số: 2.25

Lời giải chi tiết: Gọi chiều rộng đáy bể là  $x$  ( $x > 0$ )  $\Rightarrow$  chiều dài đáy là  $3x$ . Chiều cao bể là  $h$ .

Diện tích kính sử dụng (bể không nắp):  $S = 3x^2 + 2xh + 2(3x)h = 3x^2 + 8xh$ .

Diện tích kính tối đa mua được:  $S = \frac{3600000}{400000} = 9 \text{ m}^2 \Rightarrow h = \frac{9 - 3x^2}{8x}$ .

Thể tích bể cá:  $V = 3x \cdot x \cdot h = 3x^2 \left( \frac{9 - 3x^2}{8x} \right) = \frac{27x - 9x^3}{8}$ .

Xét hàm số  $f(x) = \frac{27x - 9x^3}{8}$ , ta có  $f'(x) = \frac{27 - 27x^2}{8} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ .

Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại  $x = 1 \Rightarrow V_{\max} = \frac{27(1) - 9(1)^3}{8} = 2.25 \text{ m}^3$ .

\_\_\_\_\_ **HẾT** \_\_\_\_\_