

Thí sinh: Số báo danh:

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + \sin x$ là

- A. $\frac{1}{2}x^2 + \cos x + C$. B. $\frac{1}{2}x^2 - \cos x + C$. C. $x^2 - \cos x + C$. D. $x^2 + \cos x + C$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

- A. -1. B. 0. C. 1. D. 4.

Câu 3. Cho $\int_0^1 f(x)dx = 2$ và $\int_0^1 g(x)dx = 5$ khi đó $\int_0^1 [3f(x) - 2g(x)]dx$ bằng

- A. -4. B. 16. C. -3. D. 11.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(1; 2; 3)$ và song song

với đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -1 - 4t \end{cases}$ là

- A. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+3}{-4}$. B. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-4}$.
C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}$. D. $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (3; 0; 1)$, $\vec{b} = (1; -1; -2)$ và $\vec{c} = (2; 1; -1)$. Tích vô hướng $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c})$ bằng

- A. 0. B. 3. C. 6. D. 9.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có $f(1) = 3$ và $f'(1) = 2$. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 9}{x - 1}$ bằng

- A. 12. B. 6. C. 2. D. 18.

Câu 7. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = x$ và đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x$ bằng

- A. 4. B. $\frac{7}{2}$. C. $\frac{9}{2}$. D. 3.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng qua $A(1; 2; -1)$ và vuông góc với các mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z - 2 = 0$; $(Q): x + y + z - 1 = 0$ có phương trình là

- A. $x + y + 2z - 1 = 0$. B. $4x - y + z - 1 = 0$.
C. $4x - y - 3z - 5 = 0$. D. $x - y + z + 2 = 0$.

Câu 9. Trong hải dương học, độ sâu d (tính bằng mét) mà ánh sáng mặt trời có thể xuyên qua được liên hệ với cường độ ánh sáng I tại độ sâu đó bằng công thức $I = I_0 e^{-kd}$, trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước và k là hệ số hấp thụ của nước. Biết cường độ ánh sáng tại độ sâu 10 m bằng một nửa cường độ ánh sáng tại mặt nước, tìm giá trị của k (làm tròn đến ba chữ số thập phân).

- A. 0,069. B. 0,077. C. 0,083. D. 0,091.

Câu 10. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 + x}{x + 1}$ là
A. $y = 2x + 1$. **B.** $y = 2x - 3$. **C.** $y = 2x$. **D.** $y = 2x - 1$.

Câu 11. Cho bảng thống kê doanh số bán hàng của 30 cửa hàng của một chuỗi siêu thị mini trong một ngày như sau:

Doanh số (triệu đồng)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)
Số cửa hàng	2	5	10	8	4	1

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên là

A. 60. **B.** 10. **C.** 16,375. **D.** 26,375.

Câu 12. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, mặt bên (SBC) tạo với đáy một góc bằng 30° . Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **B.** $\frac{8\sqrt{3}a^3}{9}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{9}$. **D.** $\frac{8\sqrt{3}a^3}{3}$.

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý **a)**, **b)**, **c)**, **d)** ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Một công ty khí tượng sử dụng hai mô hình dự báo thời tiết hoạt động độc lập với nhau là Mô hình 1 và Mô hình 2. Dựa trên dữ liệu quá khứ, độ chính xác của các mô hình được quy định như sau:

- Mô hình 1: Có xác suất dự báo đúng là 80%. Nghĩa là, nếu thực tế trời mưa, xác suất mô hình báo có mưa là 0,8; nếu thực tế không mưa, xác suất mô hình báo không mưa là 0,8.
- Mô hình 2: Có xác suất dự báo đúng là 90%. Nghĩa là, nếu thực tế trời mưa, xác suất mô hình báo có mưa là 0,9; nếu thực tế không mưa, xác suất mô hình báo không mưa là 0,9.

Biết rằng tỷ lệ ngày có mưa trong năm ở khu vực này là 20%.

- Xác suất để cả hai mô hình đều dự báo sai là 0,2.
- Trong trường hợp Mô hình 1 dự báo không mưa và Mô hình 2 dự báo có mưa, xác suất Mô hình 1 dự báo đúng thấp hơn xác suất Mô hình 2 dự báo đúng.
- Xác suất để cả hai mô hình đều dự báo có mưa 0,16.
- Nếu cả hai mô hình đều dự báo trời có mưa thì xác suất để thực tế trời có mưa là 0,9.

Câu 2. Chi phí vận hành trung bình (tính bằng triệu đồng/chuyến) của một công ty vận tải khi vận hành x chuyến xe mỗi ngày được cho bởi hàm số $A(x) = 0,2x + 2 + \frac{500}{x}$ với $10 \leq x \leq 100$.

- Đạo hàm của hàm chi phí trung bình là $A'(x) = \frac{0,2x^2 + 500}{x^2}$.
- Chi phí trung bình trên mỗi chuyến xe thấp nhất bằng 22 triệu đồng.
- Nếu do giới hạn về số lượng tài xế khiến công ty chỉ có thể vận hành tối đa 40 chuyến xe mỗi ngày. Chi phí trung bình trên mỗi chuyến xe trong trường hợp này thấp nhất bằng 22,5 triệu đồng.
- Tổng chi phí vận hành của công ty vận tải trong một ngày thấp nhất bằng 1,1 tỷ đồng.

Câu 3. Một kiến trúc sư thiết kế bồn hoa trong công viên trên hệ trục tọa độ Oxy (đơn vị: mét). Bồn hoa là hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P) : y = -x^2 + 4$ và trục hoành Ox . Kiến trúc sư bố trí một dải đèn LED thẳng, được mô phỏng bởi đường thẳng d đi qua điểm $M(0; 1)$, cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A và B (có hoành độ lần lượt là x_1, x_2). Dải đèn chia bồn hoa thành hai phần riêng biệt: Phần hình phẳng nằm phía trên dây cung AB được dùng để trồng Hoa Hồng, phần còn lại của bồn hoa (nằm phía dưới dây cung AB) được dùng để trồng Cỏ Nhật.

- Diện tích toàn bộ bồn hoa (tổng diện tích trồng Hoa Hồng và Cỏ Nhật) bằng 16 m^2 .
- Tích các hoành độ giao điểm của đường thẳng d và parabol (P) luôn bằng 3 (tức là $x_1 x_2 = 3$).
- Diện tích trồng Hoa Hồng đạt giá trị nhỏ nhất khi dải đèn LED được thiết kế nằm ngang (song song với trục hoành).
- Khi diện tích trồng Hoa Hồng gấp đôi diện tích trồng Cỏ Nhật, chiều dài của dải đèn LED (tính bằng độ dài đoạn thẳng AB) xấp xỉ 3,84 mét (làm tròn đến hàng phần trăm).

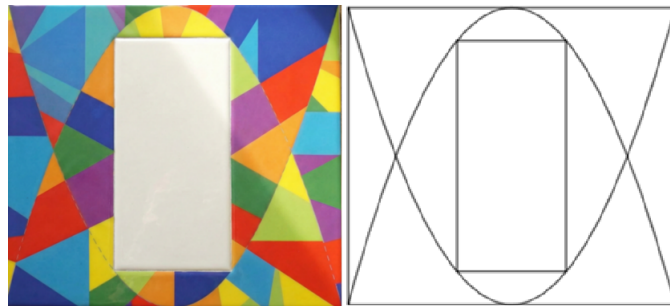
Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x - y + z - 2 = 0$ và hai điểm $A(1; 2; -1); B(2; 3; 0)$.

- Đoạn thẳng AB có độ dài bằng 3.
- Hai điểm A, B nằm cùng phía đối với mặt phẳng (P) .
- Hình chiếu vuông góc của B trên (P) có tung độ bằng 2.
- Xét điểm $M \in (P)$, giá trị nhỏ nhất của $MA + MB$ bằng $3\sqrt{2}$.

Phần III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B, BC = 3, SA \perp (ABC)$ và $SB = 6$. Gọi E là trung điểm của cạnh SB . Biết góc giữa hai đường thẳng SA và CE bằng 60° . Tính thể tích của khối chóp đã cho.

Câu 2. Một cơ sở sản xuất dự định làm các viên gạch men hình vuông cạnh 60 cm. Bề mặt viên gạch được trang trí bởi một họa tiết hình chữ nhật màu trắng có tâm trùng với tâm viên gạch. Các đỉnh của hình chữ nhật này nằm trên hai đường parabol đối xứng nhau qua tâm viên gạch. Biết rằng mỗi đường parabol có đỉnh tại trung điểm một cạnh của viên gạch và đi qua hai đầu mút của cạnh đối diện (như hình vẽ mô phỏng). Cho biết chi phí nguyên liệu phần men trắng là 80 nghìn đồng/ m^2 , còn phần men màu bao quanh là 200 nghìn đồng/ m^2 . Hỏi chi phí nguyên liệu thấp nhất để sản xuất một viên gạch là bao nhiêu nghìn đồng? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



Câu 3. Một công ty năng lượng đang xây dựng một bể chứa khí thiên nhiên hóa lỏng (LNG) có dạng hình cầu với bán kính 20 mét. Để đảm bảo an toàn và dễ dàng trong việc lắp đặt hệ thống đường ống, phần đáy và phần đỉnh của bể được cắt phẳng. Phần đáy bị cắt bởi một mặt phẳng cách tâm bể 18 mét, phần đỉnh bị cắt bởi một mặt phẳng cách tâm 15 mét (tâm nằm giữa hai mặt phẳng). Hỏi thể tích bể đó là bao nhiêu nghìn mét khối? (làm tròn đến hàng đơn vị)

Câu 4. Xét các cấp số cộng (a_n) có số hạng đầu tiên a_1 và công sai d đều là các số nguyên dương và thỏa mãn $2^{a_8} = 2^{27}a_8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của a_3 .

Câu 5. Xét một bảng ô vuông kích thước 3×3 . Mỗi ô được điền ngẫu nhiên và độc lập một giá trị từ tập $\{-1; 0; 1\}$. Biết rằng tổng các số trên mỗi hàng đều bằng 0, gọi p là xác suất để tổng các số trên mỗi cột cũng đều bằng 0. Tính giá trị của $3430p$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 4 \end{cases}$ và điểm $A(0; 6; 4)$.

Gọi (P) là mặt phẳng thay đổi luôn chứa đường thẳng d . Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (P) . Tính khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ O đến điểm H .

.....**Hết**.....

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu;
- Giám thị không giải thích gì thêm.

ĐÁP ÁN ĐỀ 101

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

1 B 2 D 3 A 4 D 5 C 6 A 7 C 8 C 9 A 10 D 11 C 12 B

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1	a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
Câu 2	a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
Câu 3	a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
Câu 4	a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

Phần III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

	Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6
Đáp số	9	60,2	32	12	310	8

HƯỚNG DẪN GIẢI

PHẦN I. Trắc nghiệm 4 phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh trả lời một phương án.

Câu 1: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + \sin x$ là

- A. $\frac{1}{2}x^2 + \cos x + C$. **B. $\frac{1}{2}x^2 - \cos x + C$.** C. $x^2 - \cos x + C$. D. $x^2 + \cos x + C$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int (x + \sin x) dx = \frac{x^2}{2} - \cos x + C.$$

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

- A. -1 . B. 0 . C. 1 . **D. 4 .**

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - 3$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên, suy ra giá trị cực đại của hàm số bằng 4 .

Câu 3: Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^1 g(x) dx = 5$ khi đó $\int_0^1 [3f(x) - 2g(x)] dx$ bằng

- A. -4 .** B. 16 . C. -3 . D. 11 .

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_0^1 [3f(x) - 2g(x)] dx = 3 \int_0^1 f(x) dx - 2 \int_0^1 g(x) dx = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 5 = -4.$$

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(1;2;3)$ và song song với

đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -1 - 4t \end{cases}$ là

A. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+3}{-4}$.

B. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-4}$.

C. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}$.

D. $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}$.

Lời giải

Đường thẳng d có vector chỉ phương $\vec{u} = (-1; 1; -4)$.

Đường thẳng Δ cần tìm song song với d nên nhận $\vec{u}$ làm vector chỉ phương, đồng thời đi qua điểm A nên có phương trình $\Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-4}$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (3; 0; 1)$, $\vec{b} = (1; -1; -2)$ và $\vec{c} = (2; 1; -1)$. Tích vô hướng $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$ bằng

A. 0.

B. 3.

C. 6.

D. 9.

Lời giải

Ta có $\vec{b} + \vec{c} = (3; 0; -3)$.

Suy ra $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 3 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-3) = 6$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có $f(1) = 3$ và $f'(1) = 2$. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 9}{x - 1}$ bằng

A. 12.

B. 6.

C. 2.

D. 18.

Lời giải

Từ $f'(1) = 2$ ta được $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x - 1} = 2$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 9}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[f(x) - 3][f(x) + 3]}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + 3]$
 $= 2 \cdot [f(1) + 3] = 2 \cdot (3 + 3) = 12$.

Câu 7: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = x$ và đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x$ bằng

A. 4.

B. $\frac{7}{2}$.

C. $\frac{9}{2}$.

D. 3.

Lời giải

Ta có: $x = x^2 - 2x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$.

Diện tích hình phẳng: $S = \int_0^3 |x^2 - 3x| dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^3 = \frac{9}{2}$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng qua $A(1;2;-1)$ và vuông góc với các mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z - 2 = 0$; $(Q): x + y + z - 1 = 0$ có phương trình là

A. $x + y + 2z - 1 = 0$.

B. $4x - y + z - 1 = 0$.

C. $4x - y - 3z - 5 = 0$.

D. $x - y + z + 2 = 0$.

Lời giải

Ta có: $\vec{n}_P = (2; -1; 3)$; $\vec{n}_Q = (1; 1; 1)$; $\vec{n} = \begin{bmatrix} \vec{n}_P \\ \vec{n}_Q \end{bmatrix} = (-4; 1; 3)$.

Mặt phẳng đi qua $A(1;2;-1)$ nhận vector $\vec{n}' = (4; -1; -3)$ làm vec tơ pháp tuyến có phương trình là: $4(x-1) - (y-2) - 3(z+1) = 0 \Leftrightarrow 4x - y - 3z - 5 = 0$.

Câu 9: Trong hải dương học, độ sâu d (tính bằng mét) mà ánh sáng mặt trời có thể xuyên qua được liên hệ với cường độ ánh sáng I tại độ sâu đó bằng công thức $I = I_0 e^{-kd}$, trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước và k là hệ số hấp thụ của nước. Biết cường độ ánh sáng tại độ sâu $10m$ bằng một nửa cường độ ánh sáng tại mặt nước, tìm giá trị của k (làm tròn đến ba chữ số thập phân).

A. 0,069.

B. 0,077.

C. 0,083.

D. 0,091.

Lời giải

Ta có: $I = I_0 e^{-kd} \Leftrightarrow \frac{1}{2} I_0 = I_0 e^{-10k} \Leftrightarrow -10k = \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{-1}{10} \ln \frac{1}{2} = 0,069$.

Câu 10: Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 + x}{x + 1}$ là

A. $y = 2x + 1$.

B. $y = 2x - 3$.

C. $y = 2x$.

D. $y = 2x - 1$.

Lời giải

Ta có: $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x}{x^2 + x} = 2$.

$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + x}{x+1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$

(Tương tự: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = 2$; $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - 2x) = -1$).

Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận xiên: $y = 2x - 1$.

Câu 11: Cho bảng thống kê doanh số bán hàng của 30 cửa hàng của một chuỗi siêu thị mini trong một ngày như sau:

Doang số (triệu đồng)	[20;30)	[30;40)	[40;50)	[50;60)	[60;70)	[70;80)
Số cửa hàng	2	5	10	8	4	1

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên là

A. 60.

B. 10.

C. 16,375.

D. 26,375.

Lời giải

Cỡ mẫu: $n = 30$.

Ta có: $\frac{n}{4} = 7,5 \Rightarrow Q_1 \in [40;50)$; $\frac{3n}{4} = 22,5 \Rightarrow Q_3 \in [50;60)$.

$$Q_1 = 40 + \frac{7,5 - (2+5)}{10} \cdot 10 = 40,5; \quad Q_3 = 50 + \frac{22,5 - (2+5+10)}{8} \cdot 10 = 56,875.$$

Khoảng tứ phân vị: $\Delta_Q = 56,875 - 40,5 = 16,375$.

Câu 12: Cho khối chóp $S.ABCD$, có đáy là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy; mặt bên (SBC) tạo với đáy một góc 30° . Thể tích của khối chóp đã cho bằng

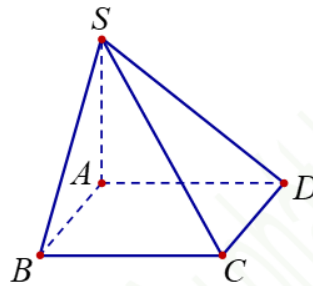
A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

B. $\frac{8\sqrt{3}a^3}{9}$.

C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{9}$.

D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{9}$.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} SA \perp BC \text{ (Vì } SA \perp (ABCD)) \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow SB \perp BC$;

$$\begin{cases} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ SB \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow ((SBC), (ABCD)) = (SB, AB) = \widehat{SBA} = 30^\circ.$$

Xét tam giác SAB vuông tại A , ta có: $SA = AB \cdot \tan \widehat{SBA} = 2a \cdot \tan 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

Thể tích khối chóp:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}a}{3} \cdot 4a^2 = \frac{8\sqrt{3}a^3}{9}.$$

PHẦN II. Trắc nghiệm chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Một công ty khí tượng sử dụng hai mô hình dự báo thời tiết hoạt động độc lập với nhau là Mô hình 1 và Mô hình 2. Dựa trên dữ liệu quá khứ, độ chính xác của các mô hình được quy định như sau:

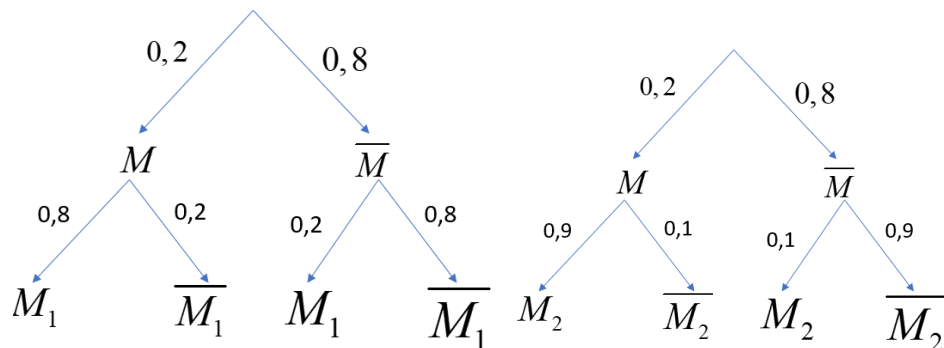
- Mô hình 1: Có xác suất dự báo đúng là 80%. Nghĩa là, nếu thực tế trời mưa, xác suất mô hình báo có mưa là 0,8, nếu thực tế không mưa, xác suất mô hình báo không mưa là 0,8.
- Mô hình 2: Có xác suất dự báo đúng là 90%. Nghĩa là, nếu thực tế trời mưa, xác suất mô hình dự báo có mưa là 0,9, nếu thực tế không mưa, xác suất mô hình báo không mưa là 0,9

Biết rằng tỷ lệ ngày có mưa ở khu vực này là 20%.

- Xác suất để cả hai mô hình đều dự báo sai là 0,2.
- Trong trường hợp Mô hình 1 dự báo không mưa và Mô hình 2 dự báo có mưa, xác suất Mô hình 1 dự báo đúng thấp hơn xác suất Mô hình 2 dự báo đúng.
- Xác suất để cả hai mô hình đều dự báo có mưa là 0,16.
- Nếu cả hai mô hình đều dự báo trời có mưa thì xác suất để thực tế trời có mưa là 0,9.

Lời giải

Gọi các biến cố như sau: M : “trời mưa”, M_1 : “Mô hình 1 báo có mưa”, M_2 : “Mô hình 2 báo có mưa”. Ta có sơ đồ cây sau:



a) Sai

Xác suất để cả hai mô hình đều dự báo sai là:

$$\left[P(\overline{M_1}M) + P(M_1\overline{M}) \right] \cdot \left[P(\overline{M_2}M) + P(M_2\overline{M}) \right] = (0,2 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,8) \cdot (0,1 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,8) = 0,02$$

b) Sai

$$P(\overline{M} | \overline{M_1}) = \frac{0,8 \cdot 0,8}{0,8 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,2} = \frac{16}{17}; \quad P(M | M_2) = \frac{0,2 \cdot 0,9}{0,2 \cdot 0,9 + 0,1 \cdot 0,8} = \frac{9}{13}. \quad \text{Vì } \frac{16}{17} > \frac{9}{13} \text{ nên}$$

Mô hình 1 dự báo đúng cao hơn xác suất Mô hình 2 dự báo đúng.

c) Đúng

Không sử dụng sơ đồ hình cây phía trên vì: Để dự báo là có mưa hay không thì hoàn toàn phụ thuộc vào thời tiết lúc đó, nên ta xét 2 TH:

+ **TH1:** Nếu trời mưa, tính xác suất của cả 2 mô hình báo mưa

+ **TH2:** Nếu trời không mưa, xác suất cả 2 mô hình báo mưa

Xác suất để cả hai mô hình đều dự báo có mưa là:

$$P(M_1M_2) = P(M) \cdot P(M_1 | M) \cdot P(M_2 | M) + P(\overline{M}) \cdot P(M_1 | \overline{M}) \cdot P(M_2 | \overline{M})$$

$$P(M_1M_2) = (0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,9) + (0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,1) = 0,144 + 0,016 = 0,16$$

d) Đúng

$$P(M | M_1M_2) = \frac{0,144}{0,16} = 0,9.$$

Câu 2: Chi phí vận hành trung bình (tính bằng triệu đồng/chuyến) của một công ty vận tải khi vận hành x chuyến xe mỗi ngày được cho bởi hàm số $A(x) = 0,2x + 2 + \frac{500}{x}$ với $10 \leq x \leq 100$.

a) Đạo hàm của hàm chi phí trung bình là $A'(x) = \frac{0,2x^2 + 500}{x^2}$.

b) Chi phí trung bình trên mỗi chuyến xe thấp nhất bằng 22 triệu đồng.

c) Nếu do giới hạn về số lượng tài xế khiến công ty chỉ có thể vận hành tối đa 40 chuyến xe mỗi ngày. Chi phí trung bình mỗi chuyến xe trong trường hợp này thấp nhất bằng 22,5 triệu đồng.

d) Tổng chi phí vận hành của công ty vận tải trong một ngày thấp nhất bằng 1,1 tỷ đồng.

Lời giải

a) Sai

Đạo hàm của hàm chi phí trung bình là $A'(x) = \frac{0,2x^2 - 500}{x^2}$.

b) Đúng

Ta có: $A'(x) = \frac{0,2x^2 - 500}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 50$. Ta có bảng biến thiên sau:

x	10	50	100
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	54	22	27

Từ bảng biến thiên ta thấy: Chi phí trung bình trên mỗi chuyến xe thấp nhất bằng 22 triệu đồng.

c) Đúng

Từ giả thiết ta có $x \leq 40$, từ bảng biến thiên

Chi phí trung bình mỗi chuyến xe trong trường hợp này thấp nhất là $A(40) = 22,5$ (triệu đồng).

d) Sai

Tổng chi phí vận hành của công ty vận tải trong một ngày là: $B(x) = x.A(x) = 0,2x^2 + 2x + 500$ (triệu đồng)

Có: $B'(x) = 0,4x + 2 > 0$ với $10 \leq x \leq 100$. Do đó

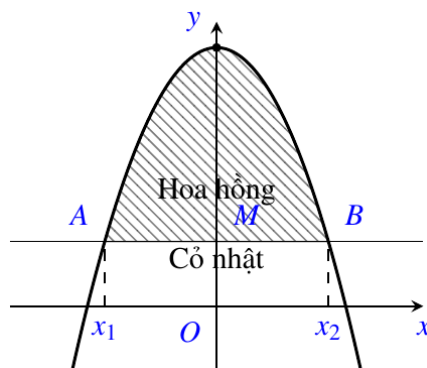
Tổng chi phí vận hành của công ty vận tải trong một ngày thấp nhất là: $B(10) = 540$ (triệu đồng).

Câu 3: Một kiến trúc sư thiết kế bồn hoa trong công viên trên hệ trục tọa độ Oxy (đơn vị: mét). Bồn hoa là hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = -x^2 + 4$ và trục hoành Ox . Kiến trúc sư bố trí một dải đèn LED thẳng, được mô phỏng bởi đường thẳng d đi qua điểm $M(0;1)$, cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A và B (có hoành độ lần lượt là x_1, x_2). Dải đèn chia bồn hoa thành hai phần riêng biệt: Phần hình phẳng nằm phía trên dây cung AB được dùng để trồng Hoa Hồng, phần còn lại của bồn hoa (nằm phía dưới dây cung AB) được dùng để trồng Cỏ Nhật.

a) Diện tích toàn bộ bồn hoa (tổng diện tích trồng Hoa Hồng và Cỏ Nhật) bằng $16m^2$.

- b) Tích các hoành độ giao điểm của đường thẳng d và parabol (P) luôn bằng 3 (tức là $x_1 x_2 = 3$).
- c) Diện tích trồng Hoa Hồng đạt giá trị nhỏ nhất khi dải đèn LED được thiết kế nằm ngang (song song với trục hoành).
- d) Khi diện tích trồng Hoa Hồng gấp đôi diện tích trồng Cỏ Nhật, chiều dài của dải đèn LED (tính bằng độ dài đoạn thẳng AB) xấp xỉ 3,84 mét (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải



a) Sai.

Hoành độ giao điểm của (P) và trục Ox là nghiệm phương trình: $-x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Vậy diện tích toàn bộ bồn hoa (tổng diện tích trồng Hoa Hồng và Cỏ Nhật) bằng

$$S = \int_{-2}^2 |-x^2 + 4| dx = \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx = \frac{32}{3} \text{ m}^2.$$

b) Sai.

Gọi k là hệ số góc của đường thẳng d đi qua điểm $M(0;1)$.

Khi đó phương trình đường thẳng d là $y = kx + 1$

Hoành độ giao điểm của (P) và đường thẳng d là nghiệm phương trình:

$$-x^2 + 4 = kx + 1 \Leftrightarrow x^2 - kx - 3 = 0 (*).$$

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $(*)$.

Theo Viét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = k \\ x_1 x_2 = -3 \end{cases}.$$

c) Đúng.

Diện tích trồng Hoa Hồng là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng d .

$$\text{Ta có } S_{HH} = \int_{x_1}^{x_2} |-x^2 + 4 - (kx + 1)| dx = \int_{x_1}^{x_2} (-x^2 - kx + 3) dx = \int_{x_1}^{x_2} (-x^2 - kx + 3) dx$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{kx^2}{2} + 3x \right) \Big|_{x_1}^{x_2} = -\frac{x_2^3}{3} - \frac{kx_2^2}{2} + 3x_2 + \frac{x_1^3}{3} + \frac{kx_1^2}{2} - 3x_1$$

$$= -\frac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3) - \frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2) + 3(x_2 - x_1) = -\frac{2x_2^3}{3} + 6x_2$$

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{k^2 + 12}(k^2 + 3) + \frac{k}{2}\sqrt{k^2 + 12} + 3\sqrt{k^2 + 12}$$

$$= \sqrt{k^2 + 12} \left(-\frac{k^3}{3} - 1 + \frac{k^2}{2} + 3 \right) = \sqrt{k^2 + 12} \left(\frac{k^2}{6} + 2 \right) = \frac{(\sqrt{k^2 + 12})^3}{6} \geq \frac{3\sqrt{12}}{6}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $k = 0$. Suy ra phương trình đường thẳng $d: y = 1$.

Vậy diện tích trồng Hoa Hồng đạt giá trị nhỏ nhất khi dải đèn LED được thiết kế nằm ngang (song song với trục hoành).

d) Đúng.

$$\text{Do } S_{HH} = 2S_{CN} \Rightarrow S_{HH} = \frac{2}{3}S = \frac{2}{3} \cdot \frac{32}{3} = \frac{64}{9} \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{k^2+12})^3}{6} = \frac{64}{9} \Leftrightarrow \sqrt{k^2+12} = \sqrt[3]{\frac{128}{3}}.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_2 - x_1 = \sqrt[3]{\frac{128}{3}} \\ k^2 = \left(\sqrt[3]{\frac{128}{3}}\right)^2 - 12 \end{cases}. \text{ Tọa độ } A(x_1; kx_1 + 1) \text{ và } B(x_2; kx_2 + 1).$$

$$\text{Ta có } AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + k^2(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2(k^2 + 1)} \approx 3,84$$

Khi diện tích trồng Hoa Hồng gấp đôi diện tích trồng Cỏ Nhật, chiều dài của dải đèn LED (tính bằng độ dài đoạn thẳng AB) xấp xỉ 3,84 mét (làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - y + z - 2 = 0$ và hai điểm $A(1; 2; -1)$; $B(2; 3; 0)$.

a) Đoạn thẳng AB có độ dài bằng 3.

b) Hai điểm A, B nằm cùng phía đối với mặt phẳng (P) .

c) Hình chiếu vuông góc của B trên (P) có tung độ bằng 2.

d) Xét điểm $M \in (P)$, giá trị nhỏ nhất của $MA + MB$ bằng $3\sqrt{2}$.

Lời giải

a) Sai.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (1; 1; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

b) Đúng.

$$\text{Thay tọa độ điểm } A, B \text{ vào phương trình mặt phẳng } (P) \text{ ta có } \begin{cases} 1 - 2 - 1 - 2 = -4 \\ 2 - 3 + 0 - 2 = -3 \end{cases}.$$

Suy ra A, B nằm cùng phía đối với mặt phẳng (P) .

c) Sai.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên (P) . Khi đó $BH \perp (P)$.

Suy ra đường thẳng BH có vector chỉ phương $\vec{u} = \vec{n}_{(P)} = (1; -1; 1)$.

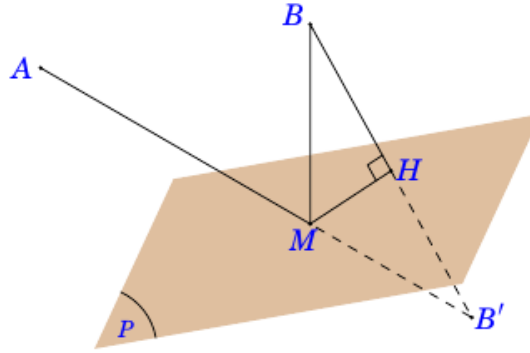
$$\text{Phương trình tham số của đường thẳng } BH \text{ là } \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}.$$

Do $H = BH \cap (P)$, nên tọa độ điểm H ứng với tham số t là nghiệm phương trình

$$2 + t - (3 - t) + t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(3; 2; 1).$$

Vậy hình chiếu vuông góc của B trên (P) có tung độ bằng 3.

d) Sai.



Gọi B' là điểm đối xứng với B qua mặt phẳng (P) .

Khi đó H là trung điểm đoạn thẳng BB' . Suy ra tọa độ $B'(4;1;2)$.

Ta có $MA + MB = MA + MB' \geq AB'$.

Suy ra $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất khi ba điểm M, A, B thẳng hàng.

Ta có $\overrightarrow{AB'} = (3; -1; 3) \Rightarrow AB' = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{19}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA + MB$ bằng $\sqrt{19}$.

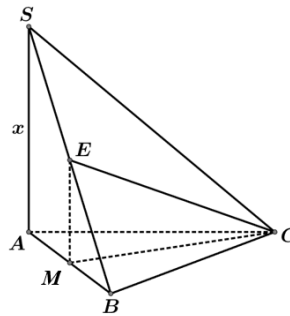
PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $BC = 3$, $SA \perp (ABC)$ và $SB = 6$.

Gọi E là trung điểm của cạnh SB . Biết góc giữa hai đường thẳng SA và CE bằng 60° . Tính thể tích của khối chóp đã cho.

Đáp số: 9

Lời giải



Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow ME \parallel SA$

$$\Rightarrow (SA, CE) = (ME, CE) \Rightarrow \begin{cases} \widehat{MEC} = 60^\circ \\ \widehat{MEC} = 120^\circ \end{cases}$$

$$\text{Đặt } SA = x \Rightarrow \begin{cases} AB = \sqrt{36 - x^2} \\ ME = \frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow MB = \frac{\sqrt{36 - x^2}}{2}$$

$$\text{Xét } \triangle MBC \text{ vuông tại } B: MC = \sqrt{9 + \frac{36 - x^2}{4}}$$

$$\text{Vì } \left. \begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABC)) \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$$

$$\text{Xét } \triangle EBC \text{ vuông tại } B: EC = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

Áp dụng hệ quả định lý cos trong $\triangle MEC$ có:

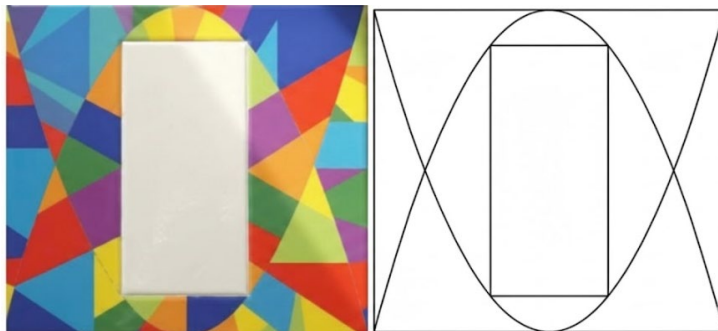
$$\cos \widehat{MEC} = \frac{ME^2 + EC^2 - MC^2}{2 \cdot ME \cdot EC} = \frac{\frac{x^2}{4} + 18 - 9 - \frac{36 - x^2}{4}}{2 \cdot \frac{x}{2} \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{2}x^2}{3\sqrt{2}x} = \frac{\sqrt{2}}{12}x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{2}}{12}x \Rightarrow x = 3\sqrt{2} \Rightarrow SA = 3\sqrt{2} \\ \cos 120^\circ = \frac{\sqrt{2}}{12}x \Rightarrow x = -3\sqrt{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

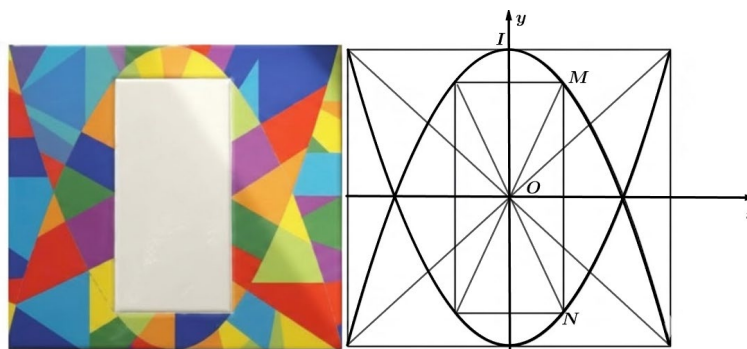
$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{6} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{36 - (3\sqrt{2})^2} \cdot 3 = 9.$$

Câu 2: Một cơ sở sản xuất dự định làm các viên gạch men hình vuông cạnh $60cm$. Bề mặt viên gạch được trang trí bởi một họa tiết hình chữ nhật màu trắng có tâm trùng với tâm viên gạch. Các đỉnh của hình chữ nhật này nằm trên hai đường parabol đối xứng nhau qua tâm viên gạch. Biết rằng mỗi đường parabol có đỉnh tại trung điểm một cạnh của viên gạch và đi qua hai đầu mút của cạnh đối diện (như hình vẽ mô phỏng). Cho biết chi phí nguyên liệu phần men trắng là 80 nghìn đồng/ m^2 , còn phần men màu bao quanh là 200 nghìn đồng/ m^2 . Hỏi chi phí nguyên liệu thấp nhất để sản xuất một viên gạch là bao nhiêu nghìn đồng? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Đáp số: 60,2



Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Viết phương trình parabol (P_1) đi qua đỉnh $I(0;30)$ và $A(30;-30)$

$$(P_1): y = ax^2 + bx + c.$$

$$I(0;30) \in (P_1) \Rightarrow c = 30 \Rightarrow y = ax^2 + 30$$

$$x_I = 0 \Rightarrow \frac{-b}{2a} = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$A(30;-30) \in (P_1) \Rightarrow 30^2 \cdot a + 30 = -30 \Leftrightarrow a = \frac{-1}{15} \Rightarrow (P_1): y = \frac{-1}{15}x^2 + 30.$$

Gọi hàm chi phí là: $C(x)$

$$M \in (P_1) \Rightarrow M \left(x_1; \frac{-1}{15}x_1^2 + 30 \right) 0 \leq x_1 \leq 30$$

$$\Rightarrow \text{Chiều rộng của HCN là: } 2x_1. \text{ Chiều dài của HCN là: } 2 \cdot \left(\frac{-1}{15}x_1^2 + 30 \right)$$

$$\Rightarrow S_{hcn} = 4x_1 \cdot \left(\frac{-1}{15}x_1^2 + 30 \right)$$

$$\Rightarrow C(x) = 8 \cdot S_{hcn} + 20 \cdot (S_{vuong} - S_{hcn}) = 8 \cdot S_{hcn} + 20 \cdot (3600 - S_{hcn}) = -12S_{hcn} + 72000$$

$$\Rightarrow C(x) = -48x_1 \left(\frac{-1}{15}x_1^2 + 30 \right) + 72000 = \frac{16}{5}x_1^3 - 1440x_1 + 72000 \quad (0 \leq x_1 \leq 30)$$

$$\Rightarrow C'(x) = \frac{48}{5}x_1^2 - 1440 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5\sqrt{6} \in [0;30] \\ x_1 = -5\sqrt{6} \notin [0;30] \end{cases}$$

$$C(5\sqrt{6}) \approx 60242,4 \text{ (đồng)} \approx 60,2 \text{ (nghìn đồng)}$$

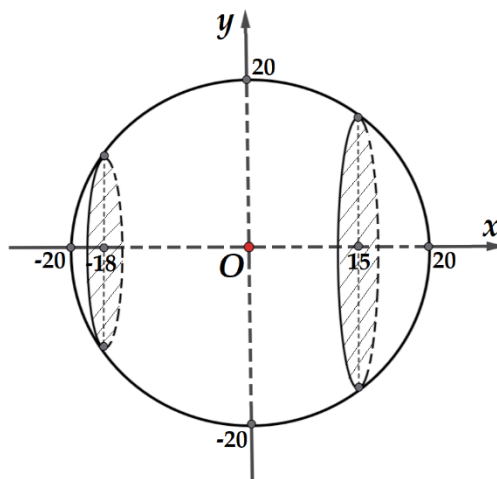
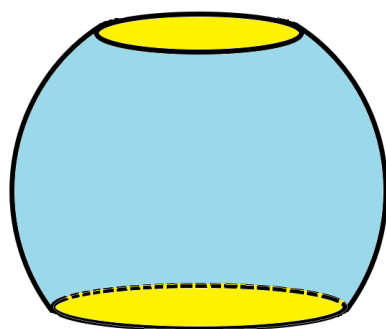
$$C(30) = 115200 \text{ (đồng)}, C(0) = 72000 \text{ (đồng)}.$$

Vậy chi phí nguyên liệu thấp nhất để sản xuất một viên gạch là 60,2 nghìn đồng.

Câu 3: Một công ty năng lượng đang xây dựng một bể chứa khí thiên nhiên hóa lỏng (LNG) có dạng hình cầu với bán kính 20 mét. Để đảm bảo an toàn và dễ dàng trong việc lắp đặt hệ thống đường ống, phần đáy và phần đỉnh của bể được cắt phẳng. Phần đáy bị cắt bởi một mặt phẳng cách tâm bể 18 mét, phần đỉnh bị cắt bởi một mặt phẳng cách tâm 15 mét (tâm nằm giữa hai mặt phẳng). Hỏi thể tích bể đó là bao nhiêu nghìn mét khối? (làm tròn đến hàng đơn vị).

Đáp số: 32.

Lời giải



Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Phương trình đường tròn lớn của mặt cầu là:

$$(C): x^2 + y^2 = 400 \Rightarrow y^2 = 400 - x^2.$$

Thể tích bể chứa khí thiên nhiên hóa lỏng là: $V = \pi \int_{-18}^{15} (400 - x^2) dx = 10131\pi \approx 32 \text{ nghìn } m^3.$

Câu 4: Xét các cấp số cộng (a_n) có số hạng đầu tiên a_1 và công sai d đều là các số nguyên dương và thỏa mãn $2^{a_8} = 2^{27} a_8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của a_3 .

Đáp số: 12

Lời giải

Đặt $x = a_8$ (với $x \in \mathbb{Z}^+$). Phương trình đã cho trở thành:

$$2^x = 2^{27} \cdot x \Leftrightarrow \frac{2^x}{2^{27}} = x \Leftrightarrow 2^{x-27} = x.$$

Lấy lô-ga-rít cơ số 2 hai vế, ta được:

$$x - 27 = \log_2 x \Leftrightarrow x - 27 - \log_2 x = 0.$$

Xét hàm số $g(x) = x - 27 - \log_2 x$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta có đạo hàm: $g'(x) = 1 - \frac{1}{x \ln 2}.$

Giải phương trình $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x \ln 2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln 2} \approx 1,44.$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$:

x	0	$\frac{1}{\ln 2}$	$+\infty$
$g'(x)$	—	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$g\left(\frac{1}{\ln 2}\right)$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $g(x) = 0$ có tối đa 2 nghiệm.

-) Trên khoảng $\left(0; \frac{1}{\ln 2}\right)$: Hàm số nghịch biến. Vì $x \in \mathbb{Z}^+$ nên ta chỉ xét $x = 1$.

Thay $x = 1$ vào $g(x)$: $g(1) = 1 - 27 - 0 = -26 \neq 0$. Vậy không có nghiệm nguyên dương trong khoảng này.

-) Trên khoảng $\left(\frac{1}{\ln 2}; +\infty\right)$: Hàm số đồng biến. Do đó phương trình $g(x) = 0$ nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Nhằm nghiệm: Ta thấy $x = 32$ thỏa mãn $g(32) = 32 - 27 - \log_2(32) = 5 - 5 = 0$.

Vậy $x = 32$ là nghiệm nguyên dương duy nhất của phương trình. Suy ra $a_8 = 32$.

Theo công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng:

$$a_8 = a_1 + 7d = 32 \Rightarrow a_1 = 32 - 7d.$$

Vì $a_1 \geq 1$ (do $a_1 \in \mathbb{Z}^+$) nên $32 - 7d \geq 1 \Leftrightarrow 7d \leq 31 \Leftrightarrow d \leq \frac{31}{7} \approx 4,4$.

Vì $d \in \mathbb{Z}^+$ nên $d \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của a_3 . Ta có:

$$a_3 = a_1 + 2d = (32 - 7d) + 2d = 32 - 5d.$$

Để a_3 nhỏ nhất thì $5d$ phải lớn nhất $\Rightarrow d$ phải lớn nhất.

Chọn $d_{\max} = 4$. Khi đó $a_1 = 32 - 7 \cdot 4 = 4$.

Giá trị nhỏ nhất của a_3 là $32 - 5 \cdot 4 = 12$.

Câu 5: Xét một bảng ô vuông kích thước 3×3 . Mỗi ô được điền ngẫu nhiên và độc lập một giá trị từ tập $\{-1; 0; 1\}$. Biết rằng tổng các số trên mỗi hàng đều bằng 0, gọi p là xác suất để tổng các số trên mỗi cột cũng đều bằng 0. Tính giá trị của $3430p$.

Đáp số: 310

Lời giải

Mỗi dòng có tổng bằng 0 có 2 dạng là $\{0; 0; 0\}$ và $\{-1; 0; 1\}$.

Suy ra không gian mẫu có $n(\Omega) = (1 + 3!)^3 = 343$.

TH1. Có hàng là $(0, 0, 0)$

Nếu hàng 1 là $(0, 0, 0)$, thì để các cột có tổng bằng 0, hai hàng còn lại phải là đối ngẫu của nhau (ví dụ hàng 2 là $(1, -1, 0)$ thì hàng 3 phải là $(-1, 1, 0)$).

Mỗi hàng 2 có 6 cách chọn, hàng 3 sẽ cố định theo hàng 2. Suy ra có $6 \cdot 3 = 18$ cách.

Nếu hàng 1 và 2 là $(0, 0, 0)$ thì hàng 3 cố định là $(0, 0, 0)$ (bảng toàn 0).

Do đó có $18 + 1 = 19$ cách.

TH2. Không có hàng nào là $(0, 0, 0)$

Hàng 1 có 6 cách xếp là hoán vị của $\{-1; 0; 1\}$.

Ở hàng 2 không được có cột trùng với hàng 1 nên mỗi hoán vị của hàng 1 có 2 cách để xếp tương ứng ở dòng 2. Ví dụ hàng 1 là $(-1, 0, 1)$ thì hàng 2 là $(0, 1, -1)$ hoặc $(1, -1, 0)$.

Khi đó hàng 3 sẽ xác định duy nhất do tổng cột bằng 0.

Do đó có $6 \cdot 2 = 12$ cách.

Vậy xác suất để mỗi cột bằng 0 là $p = \frac{19 + 12}{343} = \frac{31}{343}$.

Giá trị của $3430p = 310$.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 4 \end{cases}$ và điểm $A(0;6;4)$. Gọi (P)

là mặt phẳng thay đổi luôn chứa đường thẳng d . Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (P) . Tính khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ O đến điểm H .

Đáp số: 8

Lời giải

Đường thẳng d đi qua $M(0;0;4)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (1;0;0)$.

Suy ra d nằm trong mặt phẳng $z = 4$ và song song với trục Ox .

Điểm $A(0;6;4)$ cũng nằm trên mặt phẳng $z = 4$.

Mặt phẳng (P) quay quanh trục d . H là hình chiếu của A lên (P) . Do đó, $AH \perp (P)$. Vì $d \subset (P)$ nên $AH \perp d$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng d .

Vì $A(0;6;4)$ và d đi qua $K(t;0;4)$ suy ra $\overrightarrow{AK} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow t = 0$ suy ra $K(0;0;4)$ (chính là điểm M).

Trong tam giác AHK vuông tại H , điểm H luôn nhìn đoạn AK dưới một góc 90° .

Vậy H thuộc đường tròn đường kính AK nằm trong mặt phẳng vuông góc với d tại K .

Tâm của đường tròn quỹ tích là trung điểm I của AK suy ra $I(0;3;4)$.

Bán kính đường tròn $R = \frac{AK}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

Quỹ tích của H là đường tròn tâm $I(0;3;4)$, bán kính $R = 3$, nằm trong mặt phẳng Oyz (vì d song song Ox và A, K đều có $x = 0$).

Khoảng cách từ gốc tọa độ $O(0;0;0)$ đến tâm $I(0;3;4)$ là $OI = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = 5$.

Khoảng cách lớn nhất từ O đến một điểm H trên đường tròn là $OH_{\max} = OI + R = 5 + 3 = 8$.

☞ HẾT ☞