

Đề:

(Đề thi này gồm 01 trang)

Bài 1. (1,5 điểm) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{x+2}{x+1} + \frac{1}{y-1} = 1 \\ \frac{3}{x+1} - \frac{2y+3}{1-y} = 4 \end{cases}$$

Bài 2. (2,5 điểm) Cho phương trình bậc hai: $x^2 - x + m - 2 = 0$

- a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 3m$
b) Khi $m = 1$, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tính giá trị biểu thức

$$S = \frac{2023}{x_1^7 + 7} + \frac{2023}{x_2^7 + 7}.$$

Bài 3. (1,5 điểm) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $2xy + 2x + x + y = 0$.

Bài 4. (3,5 điểm) Cho hình thang $ABCD$, vuông tại A và D , $AD = CD = \frac{1}{2}AB$. Gọi

O_1, O_2 lần lượt là trung điểm của AB và CD và E, F là trung điểm các đoạn AO_1 và DO_2 . Trên đoạn thẳng EF lấy các điểm M, N sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{CND} = 90^\circ$.

- a) Chứng minh tứ giác $ABCM$ nội tiếp.
b) Gọi S là giao điểm của AD và BC . Chứng minh các đường thẳng BC, EF và O_1O_2 đồng quy tại S .
c) Chứng minh bốn điểm A, D, M, N cùng thuộc một đường tròn.

Bài 6. (1,0 điểm) Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $a.b = 1$. Chứng minh rằng:

$$(1+a)^2(1+b)^4 > \frac{2024}{27}.$$

----- HẾT -----

CÂU	HƯỚNG DẪN GIẢI	ĐIỂM
1.	Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{x+2}{x+1} + \frac{1}{y-1} = 1 \\ \frac{3}{x+1} - \frac{2y+3}{1-y} = 4 \end{cases}$	1,5
	Ta có: $\begin{cases} \frac{x+2}{x+1} + \frac{1}{y-1} = 1 \\ \frac{3}{x+1} - \frac{2y+3}{1-y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y-1} = 1 \\ \frac{3}{x+1} + 2 + \frac{5}{y-1} = 4 \end{cases}$	0,50
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y-1} = 0 \\ \frac{3}{x+1} + \frac{5}{y-1} = 2 \end{cases} \cdot \text{Đặt} \begin{cases} a = \frac{1}{x+1} \\ b = \frac{1}{y-1} \end{cases} \cdot \text{Ta được:}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ 3a + 5b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a = 2 \\ b = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \cdot \text{Khi đó}$	0,50
	$\begin{cases} \frac{1}{x+1} = -1 \\ \frac{1}{y-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = -1 \\ y-1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$ Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$	0,25
2.	Cho phương trình bậc hai: $x^2 - x + m - 2 = 0$ a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 3m$	0,5
	+ Điều kiện để phương trình có hai nghiệm là: $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 4(m - 2) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{9}{4}$	0,25
	+ Áp dụng định lý Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 = m - 2 \end{cases}$ + Khi đó $x_1^2 + x_2^2 = 3m \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3m$ $\Leftrightarrow 1 - 2(m - 2) = 3m \Leftrightarrow 5m = 5 \Leftrightarrow m = 1$ (thỏa mãn)	0,25

	b) Khi $m = 1$, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tính giá trị biểu thức $S = \frac{2023}{x_1^7 + 7} + \frac{2023}{x_2^7 + 7}$	1,0
	+ Với $m = 1$ phương trình trở thành $x^2 - x - 1 = 0$ + Theo định lý Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases}$	0,25
	+ $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 1^2 - 2 \cdot (-1) = 3$. + $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 1^3 - 3 \cdot (-1) \cdot 1 = 4$. + $x_1^5 + x_2^5 = (x_1^3 + x_2^3)(x_1^2 + x_2^2) - x_1^2 x_2^2 (x_1 + x_2) = 11$ + $x_1^7 + x_2^7 = (x_1^5 + x_2^5)(x_1^2 + x_2^2) - x_1^2 x_2^2 (x_1^3 + x_2^3) = 29$	0,25
	Khi đó $S = \frac{2023}{x_1^7 + 7} + \frac{2023}{x_2^7 + 7} = \frac{2023(x_1^7 + x_2^7) + 14 \cdot 2023}{x_1^7 x_2^7 + 7(x_1^7 + x_2^7) + 49}$	0,25
	$= \frac{2023 \cdot 29 + 14 \cdot 2023}{-1 + 7 \cdot 29 + 49} = \frac{86989}{251}$	0,25
3.	Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $2xy + 2x + x + y = 0$.	1,5
	Ta có: $2xy + 6x + y = 0 \Leftrightarrow 4xy + 6x + 2y = 0$	0,50
	$\Leftrightarrow 2x(2y + 3) + (2y + 3) = 3$	0,25
	$\Leftrightarrow (2x + 1)(2y + 3) = 3$	0,25
	Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $2x + 1 \in \mathbb{Z}$, $2y + 3 \in \mathbb{Z}$ Do đó ta có các trường hợp sau: TH1: $\begin{cases} 2x + 1 = 1 \\ 2y + 3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ TH2: $\begin{cases} 2x + 1 = 3 \\ 2y + 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$ TH3: $\begin{cases} 2x + 1 = -1 \\ 2y + 3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$ TH4: $\begin{cases} 2x + 1 = -3 \\ 2y + 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$ Vậy có 4 cặp số nguyên thỏa mãn là: $(0; 0), (2; -1), (-1; -3), (-2; -2)$	0,50

		0,50
4.a)	a) Chứng minh tứ giác $ABCM$ nội tiếp. Ta có $\widehat{AMB} = 90^\circ$ nên M thuộc đường tròn đường kính AB (1) Dễ thấy tứ giác $ABCD$ là hình thang vuông và $CD = DA = \frac{1}{2}AB$ nên $ADCO_1$ là hình vuông và $BCDO_1$ là hình bình hành. $\Rightarrow AC \perp DO_1$ và $DO_1 \parallel BC$ nên $AC \perp BC$ Vậy C thuộc đường tròn đường kính AB (2) Từ (1) và (2) suy ra hai điểm M, C cùng thuộc đường tròn đường kính AB. Do đó tứ giác $ABCM$ nội tiếp.	1,0 0,25 0,25 0,25 0,25
4.b)	b) Gọi S là giao điểm của AD và BC. Chứng minh các đường thẳng BC, EF và O_1O_2 đồng quy tại S. Theo giả thiết ta có BC đi qua S (1) Ta có $D \in SA, C \in SB$ và $DC \parallel AB; DC = \frac{1}{2}AB$ nên DC là đường trung bình của $\triangle SAB$. Suy ra D, C lần lượt là trung điểm SA, SB Xét $\triangle SBE$ ta có C là trung điểm SB và $CF \parallel BE$ $\Rightarrow CO_2$ là đường trung bình của $\triangle SBO_1$ $\Rightarrow O_2$ là trung điểm của SO_1. Vậy O_1O_2 đi qua S (2) Xét $\triangle SBO_1$ ta có C là trung điểm SB và $CO_2 \parallel BO_1$ $\Rightarrow CF$ là đường trung bình của $\triangle SBE$ $\Rightarrow F$ là trung điểm của SE. Vậy EF đi qua S (3) Từ (1) và (2) suy ra BC, EF và O_1O_2 đồng quy tại S	1,0 0,25 0,25 0,25 0,25

4.c)	c) Chứng minh bốn điểm A, D, M, N cùng thuộc một đường tròn.	1,0
	Gọi K là giao điểm của EF với đường tròn đường kính CD H là giao điểm của KO_2 với AB Ta có $K \in SM$, O_2 là trung điểm SO_1 và $KO_2 = \frac{1}{2}O_1M$ nên KO_2 là đường trung bình của $\triangle SO_1M$	0,25
	$\Rightarrow KO_2 \parallel MO_1$ $\widehat{KO_2D} = \widehat{KHA} = \widehat{MO_1A}$ (đồng vị)	0,25
	Mà $\widehat{KO_2D} = 2\widehat{KND}$ và $\widehat{MO_1A} = 2\widehat{MAD}$ $\Rightarrow \widehat{KND} = \widehat{MAD}$ hay $\widehat{MND} = \widehat{MAD}$	0,25
	Vậy tứ giác $ADMN$ nội tiếp hay bốn điểm A, D, M, N cùng thuộc một đường tròn.	0,25
5.	Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $a.b = 1$. Chứng minh rằng:	1,0
	$(1+a)^2(1+b)^4 > \frac{1024}{27}.$	
	$(1+a)^2 = \left(1 + \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right)^2 \geq \left(3\sqrt[3]{1 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}\right)^2 = 9 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^4}{16}}$	0,25
	$(1+b)^4 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + b\right)^4 \geq \left(3\sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot b}\right)^4 = 81 \cdot \sqrt[3]{\frac{b^4}{256}}$	0,25
	$(1+a)^2(1+b)^4 \geq 9 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^4}{4^2}} \cdot 81 \cdot \sqrt[3]{\frac{b^4}{4^4}} = \frac{729}{16} \sqrt[3]{a^4 b^4} = \frac{729}{16} > \frac{1024}{27}$	0,50