

Câu I. (1,5 điểm) Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x} + 5\sqrt{x} + 6}{x - 2\sqrt{x} - 3} - \frac{x - 7\sqrt{x} - 8}{x + 2\sqrt{x} + 1} - \frac{2x + 10\sqrt{x} + 12}{x - \sqrt{x} - 6}$
với $x \geq 0, x \neq 9$.

1. Rút gọn biểu thức A .

2. Tìm tất cả các giá trị của x để biểu thức $\frac{4}{A}$ nhận giá trị nguyên.

Câu II. (1,0 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol (P) có phương trình $y = ax^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = bx - 1$ (với a, b là các tham số). Tìm các số hữu tỉ a, b để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt sao cho hoành độ một điểm là $x = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$.

Câu III. (1,5 điểm)

1. Giải phương trình $\sqrt{x^3 + 1} + x^2 - 3x - 1 = 0$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y^2+4} + \sqrt{y} = 4 \\ 2\sqrt{xy^2+4x+y^2+4} - y + 4\sqrt{y} = 8 \end{cases}$.

Câu IV. (1,0 điểm) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $2n-1$ và $3n+1$ là các số chính phương và $6n-13$ là số nguyên tố.

Câu V. (4,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H .

1. Chứng minh DA là tia phân giác của góc EDF .

2. Chứng minh $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$.

3. Gọi M là giao điểm của tia EF với đường tròn (O) . Gọi P, Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMF và tam giác CME . Chứng minh $AM \perp PQ$.

4. Tìm mối liên hệ giữa các cạnh của tam giác ABC để biểu thức

$\frac{(AB + BC + CA)^2}{AD^2 + BE^2 + CF^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu VI. (1,0 điểm) Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc \geq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a^2 + 1 + bc} + \frac{1}{b^2 + 1 + ac} + \frac{1}{ab(c^3 + 1) + 1}$.

--- HẾT ---

Thí sinh được sử dụng máy tính bỏ túi không có chức năng soạn thảo văn bản và không có thể nhớ.

Họ và tên thí sinh:.....Số báo
danh:.....

Cán bộ coi thi số 1.....Cán bộ coi thi số
2.....

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN (ĐỀ CHUYÊN TIN)

(Hướng dẫn chấm gồm có 04 trang)

Lưu ý:

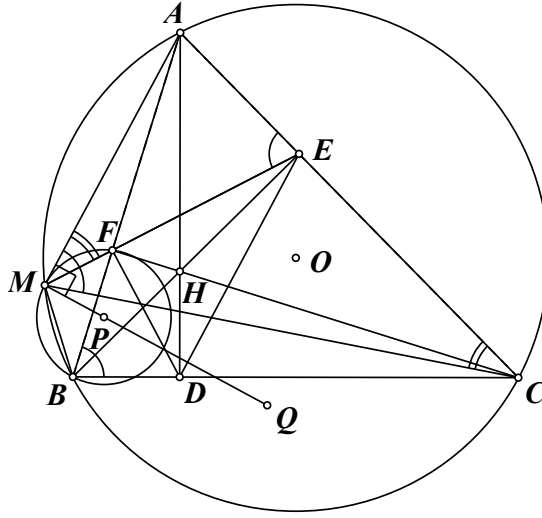
- Thí sinh có thể làm bài theo cách khác so với đáp án nhưng đảm bảo đúng kiến thức, vẫn cho điểm tối đa.
- Không làm tròn điểm.

Nội dung	Điểm
Câu I (1,5 điểm)	
Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x} + 5\sqrt{x} + 6}{x - 2\sqrt{x} - 3} - \frac{x - 7\sqrt{x} - 8}{x + 2\sqrt{x} + 1} - \frac{2x + 10\sqrt{x} + 12}{x - \sqrt{x} - 6}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.	
1.(1,0 điểm) Rút gọn biểu thức A .	
$A = \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+6)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} - \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-8)}{(\sqrt{x}+1)^2} - \frac{2(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)}$	0,25
$= \frac{x-\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}+1} - \frac{2(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}-3}$	0,25
$= \frac{x-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}+1}$	0,25
$= \sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}+1} = \frac{x+8}{\sqrt{x}+1}$	0,25
2.(0,5 điểm) Tìm tất cả các giá trị của x để $\frac{4}{A}$ nhận giá trị nguyên.	
Theo BĐT Côsi, ta có $A = \sqrt{x} + 1 + \frac{9}{\sqrt{x}+1} - 2 \geq 2\sqrt{9} - 2 = 4$	0,25
Để $\frac{4}{A} \in \mathbb{Z}$ thì $A = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = \frac{9}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn). Vậy $x = 4$.	0,25
Câu II (1,0 điểm)	
Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol (P) có phương trình $y = ax^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = bx - 1$ (với a, b là các tham số). Tìm các số hữu tỉ a, b để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt sao cho hoành độ một điểm là $x = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.	
$x = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = 4 - \sqrt{15}$	0,25
Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $ax^2 - bx + 1 = 0$ (*)	
Điều kiện để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt: $\begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 4a > 0 \end{cases}$	0,25
(*) có nghiệm $x = 4 - \sqrt{15}$ nên $a(4 - \sqrt{15})^2 - b(4 - \sqrt{15}) + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{15}(-8a + b) + 31a - 4b + 1 = 0$ Vì $a, b \in \mathbb{Q}$ nên $(-8a + b), (31a - 4b + 1) \in \mathbb{Q}$	0,25

Nếu $8a - b \neq 0$ thì $\sqrt{15} = \frac{31a - 4b + 1}{8a - b} \in \mathcal{Q}$ (vô lí)	
Suy ra $\begin{cases} 8a - b = 0 \\ 31a - 4b + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 8 \end{cases}$ (thỏa mãn)	0,25
Câu III (1,5 điểm)	
1. (0,75 điểm) Giải phương trình $\sqrt{x^3 + 1} + x^2 - 3x - 1 = 0$	
Điều kiện: $x^3 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$. $\sqrt{x^3 + 1} + x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(x^2 - x + 1)} + (x^2 - x + 1) - 2(x+1) = 0$ Đặt $u = \sqrt{x+1}$; $v = \sqrt{x^2 - x + 1}$; $u \geq 0$, $v > 0$	0,25
Phương trình đã cho trở thành: $uv + v^2 - 2u^2 = 0 \Leftrightarrow (u - v)(2u + v) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 0 \\ 2u + v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ 2u = -v \end{cases}$	0,25
Với $u = v$ ta được $\sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ (thỏa mãn phương trình) Với $2u = -v$ ta được $2\sqrt{x+1} = -\sqrt{x^2 - x + 1}$ (vô nghiệm). Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 0$ và $x = 2$.	0,25
2. (0,75 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y^2 + 4} + \sqrt{y} = 4 & (1) \\ 2\sqrt{xy^2 + 4x + y^2 + 4} - y + 4\sqrt{y} = 8 & (2) \end{cases}$	
Điều kiện: $\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq 0 \end{cases}$ Từ (1): $\sqrt{y} - 2 = 2 - \sqrt{x+1} - \sqrt{y^2 + 4}$ Từ (2): $2\sqrt{xy^2 + 4x + y^2 + 4} - y + 4\sqrt{y} = 8 \Leftrightarrow 2\sqrt{xy^2 + 4x + y^2 + 4} - (\sqrt{y} - 2)^2 = 4$	0,25
Thế (1) vào (2) ta được: $\Leftrightarrow 2\sqrt{xy^2 + 4x + y^2 + 4} - (2 - \sqrt{x+1} - \sqrt{y^2 + 4})^2 = 4$ $\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+1)(y^2 + 4)} - (4 - 4\sqrt{x+1} - 4\sqrt{y^2 + 4} + 2\sqrt{(x+1)(y^2 + 4)} + (x+1) + (y^2 + 4)) = 4$ $\Leftrightarrow (x+1) - 4\sqrt{x+1} + 4 + (y^2 + 4) - 4\sqrt{y^2 + 4} + 4 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x+1} - 2)^2 + (\sqrt{y^2 + 4} - 2)^2 = 0$	0,25
$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} - 2 = 0 \\ \sqrt{y^2 + 4} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$ (thỏa mãn). Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (3; 0)$.	0,25
Câu III. (1,0 điểm) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $2n-1$ và $3n+1$ là các số chính phương và $6n-13$ là số nguyên tố.	
Vì $6n-13$ là số nguyên tố và $n \in \mathbb{N}$ nên $n \geq 3$. Ta có $2n-1$ và $3n+1$ là các số chính phương nên $2n-1 = a^2$; $3n+1 = b^2$ với $a; b \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow 2b^2 - 3a^2 = 5$ (3)	0,25
Ta có $6n-13 = 3(2n-1) - 10 = 3a^2 - 2(2b^2 - 3a^2) = 9a^2 - 4b^2 = (3a-2b)(3a+2b)$ (4)	0,25
Vì $6n-13$ là số nguyên tố, mà $3a-2b \leq 3a+2b$ nên từ (4) ta có $3a-2b = 1 \Leftrightarrow b = \frac{3a-1}{2}$ Thay $b = \frac{3a-1}{2}$ vào (3) ta được $2\left(\frac{3a-1}{2}\right)^2 - 3a^2 = 5 \Leftrightarrow 3a^2 - 6a - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 3 \end{cases}$	0,25
$a = -1$ (loại)	0,25

$a = 3$ thì $b = 4, n = 5$ và $6n - 13 = 17$ (thỏa mãn). Vậy $n = 5$ là giá trị cần tìm.

Câu IV. (4 điểm) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H .



1. (1,0 điểm) Chứng minh DA là tia phân giác của góc EDF .

$\widehat{BFH} = \widehat{BDH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BFH} + \widehat{BDH} = 180^\circ$ nên $BFHD$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HDF} = \widehat{HBF}$ 0,25

Tương tự, $CEHD$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HDE} = \widehat{HCE}$ 0,25

$BCEF$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HBF} = \widehat{HCE}$ 0,25

Suy ra $\widehat{HDE} = \widehat{HDF}$ nên DA là tia phân giác của góc EDF . 0,25

2. (1,0 điểm) Chứng minh $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$.

Ta có: $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = \frac{\frac{1}{2}HD \cdot BC}{\frac{1}{2}AD \cdot BC} + \frac{\frac{1}{2}HE \cdot AC}{\frac{1}{2}BE \cdot AC} + \frac{\frac{1}{2}HF \cdot AB}{\frac{1}{2}CF \cdot AB}$ 0,25

$= \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}$ 0,25

$= \frac{S_{HBC} + S_{HAC} + S_{HAB}}{S_{ABC}}$ 0,25

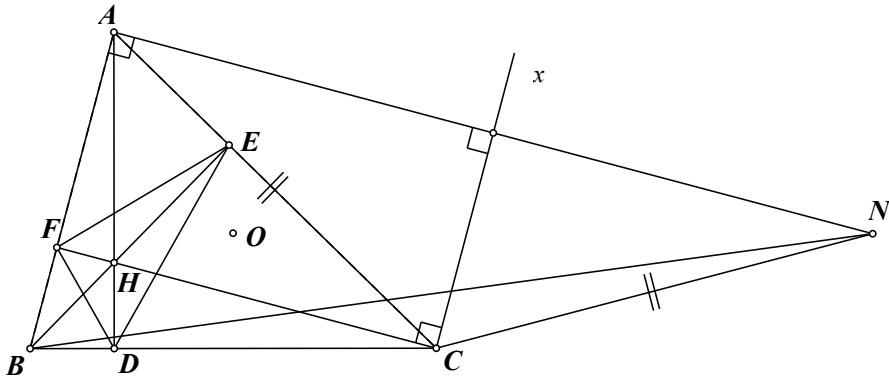
$= \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$. 0,25

3. (1,0 điểm) Gọi M là giao điểm của tia EF với đường tròn (O) . Gọi P, Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMF và tam giác CME . Chứng minh $AM \perp PQ$.

Ta có: $\widehat{AEM} = \widehat{ABC}$ (do tứ giác $BCEF$ nội tiếp)
 $\widehat{ABC} = \widehat{AMC}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AC}$ của đường tròn (O)) $\Rightarrow \widehat{AEM} = \widehat{AMC}$ 0,25

$\Rightarrow \Delta AEM \sim \Delta AMC (g.g) \Rightarrow \widehat{AME} = \widehat{ECM} = \frac{1}{2} \widehat{MEC}$ của đường tròn (Q) nên AM là tiếp tuyến của $(Q) \Rightarrow AM \perp QM$ 0,25

Theo trên $\widehat{AMF} = \widehat{ACM}$, mà $\widehat{ABM} = \widehat{ACM} = \frac{1}{2} \widehat{CMA}$ của đường tròn (O)
 $\Rightarrow \widehat{AMF} = \widehat{FBM} = \frac{1}{2} \widehat{FMB}$ của đường tròn (P) nên AM là tiếp tuyến của (P) 0,25

Vì $AM \perp PM$ và $AM \perp QM$ nên ba điểm P, Q, M thẳng hàng. Suy ra $AM \perp PQ$.	0,25
4.(1,0 điểm) Tìm mối liên hệ giữa các cạnh của tam giác ABC để biểu thức $\frac{(AB + BC + CA)^2}{AD^2 + BE^2 + CF^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.	
	
Vẽ $Cx \perp CF$. Gọi N là điểm đối xứng của A qua Cx Vì $AN \parallel CF \Rightarrow \widehat{BAN} = 90^\circ, CN = AC, AN = 2CF$. Ta luôn có $BN \leq BC + CN$	0,25
$\triangle ABN$ vuông tại A nên: $AB^2 + AN^2 = BN^2 \Rightarrow AB^2 + 4CF^2 \leq (BC + CN)^2$ $\Rightarrow 4CF^2 \leq (BC + AC)^2 - AB^2$ (5)	0,25
Tương tự: $4AD^2 \leq (AB + AC)^2 - BC^2$ và $4BE^2 \leq (AB + BC)^2 - AC^2$ Suy ra $4(AD^2 + BE^2 + CF^2) \leq (AB + BC + AC)^2$ hay $\frac{(AB + BC + CA)^2}{AD^2 + BE^2 + CF^2} \geq 4$	0,25
Đẳng thức (5) xảy ra khi B, C, N thẳng hàng $AC = \frac{1}{2}BN \Rightarrow BC = AC$. Vì vậy biểu thức đã cho đạt giá trị nhỏ nhất khi $AB = AC = BC$ hay ABC là tam giác đều.	0,25
Câu V. (1,0 điểm) Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc \geq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a^2 + 1 + bc} + \frac{1}{b^2 + 1 + ac} + \frac{1}{ab(c^3 + 1) + 1}$.	
$P = \frac{a}{a^3 + a + abc} + \frac{b}{b^3 + b + abc} + \frac{c}{abc(c^3 + 1) + c} \leq \frac{a}{a^3 + a + 1} + \frac{b}{b^3 + b + 1} + \frac{c}{c^3 + c + 1}$	0,25
$\forall x > 0$, ta luôn có $(x - 1)^2(x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - x + 1 \geq 0$ $\Leftrightarrow x^3 + x + 1 \geq x^2 + 2x \Leftrightarrow \frac{x}{x^3 + x + 1} \leq \frac{1}{x + 2}$, đẳng thức xảy ra khi $x = 1$. Suy ra $\frac{a}{a^3 + a + 1} + \frac{b}{b^3 + b + 1} + \frac{c}{c^3 + c + 1} \leq \frac{1}{a + 2} + \frac{1}{b + 2} + \frac{1}{c + 2}$	0,25
Ta sẽ chứng minh $\frac{1}{a + 2} + \frac{1}{b + 2} + \frac{1}{c + 2} \leq 1$ (6) Thật vậy, (6) $\Leftrightarrow (a + 2)(b + 2) + (b + 2)(c + 2) + (a + 2)(c + 2) \leq (a + 2)(b + 2)(c + 2)$ $\Leftrightarrow ab + bc + ca + abc \geq 4$	0,25
Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} = 3$ Mặt khác $abc \geq 1 \Rightarrow ab + bc + ca + abc \geq 4$ nên (6) đúng, suy ra $P \leq 1$. Vậy $\max P = \frac{\sqrt{3}}{3}$ khi $a = b = c = 1$.	0,25