

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN (CHUYÊN)

(Thời gian làm bài 120 phút, không kể thời gian phát đề)

Đề thi này có 01 trang

Bài 1: (1,0 điểm) Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{2 + \sqrt{xy}}$ với $x \geq 0, y \geq 0$.

Tính giá trị biểu thức A khi $x = 11 - 6\sqrt{2}, y = 3 + 2\sqrt{2}$.

Bài 2: (1,0 điểm) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2x - m + 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $A = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 3: (1,0 điểm) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 3y = \frac{4}{x^2} \\ 3x + y = \frac{4}{y^2} \end{cases}.$$

Bài 4: (2,0 điểm)

a) Trong lớp bạn An có 12 học sinh nữ và một số học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh trong lớp. Biết rằng xác suất để học sinh đó là nam là 0,625. Hỏi lớp bạn An có bao nhiêu học sinh?

b) Một công ty cần thuê xe để vận chuyển 64 tấn hàng. Đơn vị cho thuê xe chỉ có hai loại xe. Loại xe thứ nhất mỗi xe chở được 15 tấn hàng có giá thuê là 12 triệu đồng cho mỗi lượt vận chuyển. Loại xe thứ hai mỗi xe chở được 10 tấn hàng có giá thuê là 8 triệu đồng cho mỗi lượt vận chuyển. Hỏi chi phí thuê xe nhỏ nhất mà công ty phải trả để vận chuyển 64 tấn hàng là bao nhiêu?

Bài 5: (1,5 điểm)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $x^2 - xy - x + 2y + 1 = 0$.

b) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{a+2b} + \sqrt[3]{b+2c} + \sqrt[3]{c+2a} \leq 3.$$

Bài 6: (3,0 điểm) Từ một điểm S bên ngoài đường tròn (O) kẻ tiếp tuyến SA của đường tròn (A là tiếp điểm). Vẽ đường thẳng đi qua S cắt đường tròn (O) tại hai điểm B, C sao cho điểm O nằm trong góc ASC và B nằm giữa S, C . Gọi M là trung điểm của BC .

a) Chứng minh bốn điểm S, A, O, M cùng nằm trên một đường tròn.

b) Tia phân giác trong của góc BAC cắt BC tại D . Chứng minh $SA = SD$.

c) Tia AD cắt đường tròn (O) tại P khác A . Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM .

Chứng minh OI song song AP .

Bài 7: (0,5 điểm) Một cây khế có 20 quả khế màu xanh và 25 quả khế màu vàng. Một con quạ đến ăn mỗi ngày đúng 3 quả khế. Tuy nhiên cây khế sẽ ra quả mới như sau:

- Nếu con quạ ăn 3 quả khế màu xanh thì cây khế sẽ ra lại 1 quả khế màu xanh.
- Nếu con quạ ăn 2 quả khế màu xanh và 1 quả khế màu vàng thì cây khế sẽ ra lại 1 quả khế màu vàng.
- Nếu con quạ ăn 1 quả khế màu xanh và 2 quả khế màu vàng thì cây khế sẽ ra lại 1 quả khế màu xanh.
- Nếu con quạ ăn 3 quả khế màu vàng thì cây khế sẽ ra lại 1 quả khế màu vàng.

Cuối cùng trên cây khế còn lại đúng 1 quả. Hỏi quả khế cuối cùng màu gì? Giải thích?

----- Hết -----

Họ tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Chữ kí Cán bộ coi thi 1: Chữ kí Cán bộ coi thi 2:

ĐỀ CHÍNH THỨC

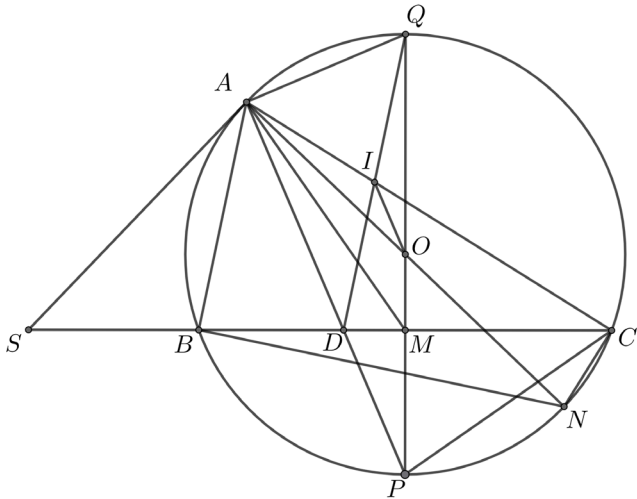
Môn: TOÁN (CHUYÊN)

HƯỚNG DẪN CHẤM THI
(Hướng dẫn chấm có 04 trang)

Bài	Đáp án	Điểm
1	Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{2 + \sqrt{xy}}$ với $x \geq 0, y \geq 0$. Tính giá trị biểu thức A khi $x = 11 - 6\sqrt{2}, y = 3 + 2\sqrt{2}$.	1,0
	$A = \frac{2(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + \sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{2 + \sqrt{xy}}$	0,25
	$A = \frac{(2 + \sqrt{xy})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{2 + \sqrt{xy}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$	0,25
	$A = \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{(3 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2}$	0,25
	$A = 3 - \sqrt{2} + \sqrt{2} + 1 = 4.$	0,25
2	Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2x - m + 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $A = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.	1,0
	Phương trình có hai nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' \geq 0$ hay $m \geq 2$	0,25
	Theo định lí Viet, ta có $x_1 + x_2 = 2$ và $x_1x_2 = -m + 3$	0,25
	$A = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2^2 - 2(-m + 3) = 2m - 2$	0,25
	$A \geq 2$ Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2 khi $m = 2$.	0,25
3	Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 3y = \frac{4}{x^2} \\ 3x + y = \frac{4}{y^2} \end{cases}$.	1,0
	Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$	0,25

Bài	Đáp án	Điểm
	$\begin{cases} x^3 + 3x^2y = 4 & (1) \\ 3xy^2 + y^3 = 4 & (2) \end{cases}$ Lấy (1) cộng (2), ta được $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 8 \text{ hay } (x + y)^3 = 8. \text{ Suy ra } x + y = 2$	0,25
	Thay $y = 2 - x$ vào (1), ta được $x^3 + 3x^2(2 - x) = 4$ $x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \text{ hay } (x - 1)(x^2 - 2x - 2) = 0$ $x = 1 \text{ hoặc } x^2 - 2x - 2 = 0. \text{ Suy ra } x = 1 \text{ hoặc } x = 1 + \sqrt{3} \text{ hoặc } x = 1 - \sqrt{3}$	0,25
	+ Với $x = 1$ suy ra $y = 1$ + Với $x = 1 + \sqrt{3}$ suy ra $y = 1 - \sqrt{3}$ + Với $x = 1 - \sqrt{3}$ suy ra $y = 1 + \sqrt{3}$ Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(1; 1), (1 + \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3}), (1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3})$.	0,25
4	a) Trong lớp bạn An có 12 học sinh nữ và một số học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh trong lớp. Biết rằng xác suất để học sinh đó là nam là 0,625. Hỏi lớp bạn An có bao nhiêu học sinh?	1,0
	Gọi x (học sinh) là số học sinh nam của lớp bạn An ($x \in \mathbb{N}$)	0,25
	Số các kết quả có thể xảy ra là $n(\Omega) = x + 12$ Gọi A là biến cố “Chọn được học sinh nam” Số các kết quả thuận lợi cho biến cố A là $n(A) = x$	0,25
	Ta có $P(A) = 0,625$ hay $\frac{x}{x+12} = 0,625$ hay $x = 20$	0,25
	Vậy lớp bạn An có $12 + 20 = 32$ học sinh.	0,25
	b) Một công ty cần thuê xe để vận chuyển 64 tấn hàng. Đơn vị cho thuê xe chỉ có hai loại xe. Loại xe thứ nhất mỗi xe chở được 15 tấn hàng có giá thuê là 12 triệu đồng cho mỗi lượt vận chuyển. Loại xe thứ hai mỗi xe chở được 10 tấn hàng có giá thuê là 8 triệu đồng cho mỗi lượt vận chuyển. Hỏi chi phí thuê xe nhỏ nhất mà công ty phải trả để vận chuyển 64 tấn hàng là bao nhiêu?	1,0
	Gọi x (xe) là số xe loại xe thứ nhất mà công ty thuê ($x \in \mathbb{N}$) y (xe) là số xe loại xe thứ hai mà công ty thuê ($y \in \mathbb{N}$)	0,25

Bài	Đáp án	Điểm
	Ta có $15x + 10y \geq 64$ Vì $15x + 10y$ chia hết cho 5 và $15x + 10y \in \{64; 65; 66; \dots\}$ nên giá trị nhỏ nhất của $15x + 10y$ là 65	0,25
	Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $15x + 10y = 65$ hay $3x + 2y = 13$. Suy ra $3x + 3y = 13 + y$ Khi đó $13 + y : 3$ hay $1 + y : 3$ Đặt $1 + y = 3k$ ($k \in \mathbb{N}$) hay $y = 3k - 1$ Từ đó ta được $3x + 2(3k - 1) = 13$ hay $x = -2k + 5$ Lại có $-2k + 5 \geq 0$ hay $k \leq \frac{5}{2}$ Suy ra $k \in \{0; 1; 2\}$. Từ đó tìm được $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$	0,25
	+ Với $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ thì chi phí thuê xe là $3.12 + 2.8 = 52$ (triệu đồng) + Với $\begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$ thì chi phí thuê xe là $1.12 + 5.8 = 52$ (triệu đồng) Vậy chi phí thuê xe nhỏ nhất mà công ty phải trả là 52 triệu đồng.	0,25
5	a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thoả mãn điều kiện $x^2 - xy - x + 2y + 1 = 0$.	0,75
	Ta có $x^2 - xy - x + 2y + 1 = 0$ $(x - 2)y = x^2 - x + 1$ (1)	0,25
	- Khi $x = 2$ phương trình (1) trở thành $0.y = 3$ (vô nghiệm) - Khi $x \neq 2$ phương trình (1) tương đương với $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 2} \text{ hay } y = x + 1 + \frac{3}{x - 2}$	0,25
	Mà x, y là các số nguyên nên $x - 2$ là ước của 3. Khi đó + $x - 2 = 1$ hay $x = 3$. Suy ra $y = 7$ + $x - 2 = -1$ hay $x = 1$. Suy ra $y = -1$ + $x - 2 = 3$ hay $x = 5$. Suy ra $y = 7$ + $x - 2 = -3$ hay $x = -1$. Suy ra $y = -1$	0,25

Bài	Đáp án	Điểm
	Vậy phương trình đã cho có nghiệm nguyên là $(3; 7), (1; -1), (5; 7), (-1; -1)$.	
5	b) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng $\sqrt[3]{a+2b} + \sqrt[3]{b+2c} + \sqrt[3]{c+2a} \leq 3.$	0,75
	Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có $\sqrt[3]{(a+2b).1.1} \leq \frac{a+2b+2}{3}$	0,25
	$\sqrt[3]{(b+2c).1.1} \leq \frac{b+2c+2}{3}$ $\sqrt[3]{(c+2a).1.1} \leq \frac{c+2a+2}{3}$	0,25
	Khi đó $\sqrt[3]{a+2b} + \sqrt[3]{b+2c} + \sqrt[3]{c+2a} \leq \frac{3a+3b+3c+6}{3} = 3.$	0,25
6	Từ một điểm S bên ngoài đường tròn (O) kẻ tiếp tuyến SA của đường tròn (A là tiếp điểm). Vẽ đường thẳng đi qua S cắt đường tròn (O) tại hai điểm B, C sao cho điểm O nằm trong góc ASC và B nằm giữa S, C . Gọi M là trung điểm của BC . a) Chứng minh bốn điểm S, A, O, M cùng nằm trên một đường tròn.	1,25
		0,25
	Ta có $\widehat{SAO} = 90^\circ$ (SA là tiếp tuyến của (O)) ΔSAO nội tiếp đường tròn đường kính SO	0,25
	Ta lại có $OB = OC$ (bán kính) Suy ra ΔOBC cân tại O nên OM là đường trung tuyến cũng là đường cao của ΔOBC . Khi đó $\widehat{SMO} = 90^\circ$ ΔSMO nội tiếp đường tròn đường kính SO	0,5

Bài	Đáp án	Điểm
	Suy ra bốn điểm S, A, O, M cùng nằm trên đường tròn đường kính SO .	0,25
	b) Tia phân giác trong của góc BAC cắt BC tại D . Chứng minh $SA = SD$.	1,0
	Kẻ đường kính AN của (O) Ta có $\widehat{BAN} = \widehat{BCN}$ (cùng chắn BN) Mà $\widehat{SAB} + \widehat{BAN} = 90^\circ$ và $\widehat{SCA} + \widehat{BCN} = 90^\circ$ Nên $\widehat{SAB} = \widehat{SCA}$	0,25
	$\widehat{SDA} = \widehat{DAC} + \widehat{ACD} = \widehat{DAB} + \widehat{BAS} = \widehat{SAD}$	0,5
	Do đó $\triangle SAD$ cân tại S . Suy ra $SA = SD$.	0,25
	c) Tia AD cắt đường tròn (O) tại P khác A . Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM . Chứng minh OI song song AP .	0,75
	Kẻ đường kính PQ của (O) Khi đó $\widehat{QAD} = \widehat{QMD} = 90^\circ$ nên tứ giác $AQMD$ nội tiếp đường tròn đường kính QD	0,25
	Suy ra I là trung điểm QD	0,25
	Từ đó ta được OI là đường trung bình của $\triangle QDP$. Do đó OI song song AP .	0,25
7	Một cây khế có 20 quả khế màu xanh và 25 quả khế màu vàng. Một con quạ đến ăn mỗi ngày đúng 3 quả khế. Tuy nhiên cây khế sẽ ra quả mới như sau: - Nếu con quạ ăn 3 quả khế màu xanh thì cây khế sẽ ra lại 1 quả khế màu xanh. - Nếu con quạ ăn 2 quả khế màu xanh và 1 quả khế màu vàng thì cây khế sẽ ra lại 1 quả khế màu vàng. - Nếu con quạ ăn 1 quả khế màu xanh và 2 quả khế màu vàng thì cây khế sẽ ra lại 1 quả khế màu xanh. - Nếu con quạ ăn 3 quả khế màu vàng thì cây khế sẽ ra lại 1 quả khế màu vàng. Cuối cùng trên cây khế còn lại đúng 1 quả. Hỏi quả khế cuối cùng màu gì? Giải thích?	0,5
	Sau mỗi lần quạ ăn số quả khế màu vàng hoặc giữ nguyên hoặc giảm đi 2 quả	0,25
	Mà số quả khế màu vàng lúc đầu là số lẻ nên quả khế cuối cùng còn lại trên cây là quả khế màu vàng.	0,25

Chú ý: Nếu thí sinh có cách giải khác và đúng vẫn cho đủ số điểm.