

A. LÝ THUYẾT

I. Đại số:

1. Phân thức đại số
2. Tính chất cơ bản của phân thức đại số
3. Phép cộng, phép trừ, phép nhân và phép chia phân thức đại số

II. Hình học:

1. Ba trường hợp đồng dạng của hai tam giác
2. Định lý Pythagore và ứng dụng

B. BÀI TẬP

DẠNG I: TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Bài 1. Rút gọn phân thức:

a) $\frac{3x(1-x)}{2(x-1)}$

b) $\frac{3(x-y)(x-z)^2}{6(x-y)(x-z)}$

c) $\frac{x^2-16}{4x-x^2}$

Bài 2. Rút gọn, rồi tính giá trị các phân thức sau:

a) $A = \frac{(2x^2+2x)(x-2)^2}{(x^3-4x)(x+1)}$ với $x = \frac{1}{2}$

b) $B = \frac{x^3-x^2y+xy^2}{x^3+y^3}$ với $x = -5; y = 10$

Bài 3. Thực hiện các phép tính

a) $\frac{1}{1-x} + \frac{2x}{x^2-1}$

b) $\frac{3}{2x+6} - \frac{x-6}{2x^2+6x}$

c) $\frac{1}{xy-x^2} - \frac{1}{y^2-xy}$

d) $\frac{5x+10}{4x-8} \cdot \frac{4-2x}{x+2}$

e) $\frac{1-4x^2}{x^2+4x} : \frac{2-4x}{3x}$

f) $\frac{5x-15}{4x+4} : \frac{x^2-9}{x^2+2x+1}$

g) $\frac{2x}{x^2+2xy} + \frac{y}{xy-2y^2} + \frac{4}{x^2-4y^2}$

h) $\left(\frac{3x}{1-3x} + \frac{2x}{3x+1} \right) : \frac{6x^2+10x}{1-6x+9x^2}$

DẠNG II: RÚT GỌN TỔNG HỢP

Bài 1. Cho hai biểu thức: $A = \frac{4}{x+1} - 1$ và $B = \frac{9-x^2}{x^2+2x+1}$ với $(x \neq \pm 3, x \neq -1)$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 1$.

b) Rút gọn biểu thức $P = \frac{A}{B}$.

c) Tìm x nguyên để P nhận giá trị nguyên.

Bài 2. Cho biểu thức: $P = \frac{x^2+2x}{2x+10} + \frac{x-5}{x} + \frac{50-5x}{2x(x+5)}$.

a) Tìm điều kiện xác định của P .

b) Rút gọn biểu thức P .

c) Tìm giá trị của x để $P = 0$; $P = \frac{1}{4}$.

d) Tìm giá trị của x để $P > 0$; $P < 0$.

Bài 3. Cho biểu thức: $P = \frac{x+2}{x+3} - \frac{5}{x^2+x-6} + \frac{1}{2-x}$

a) Tìm điều kiện xác định của P.

b) Rút gọn biểu thức P.

c) Tìm x để $P = \frac{-3}{4}$.

d) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức P có giá trị nguyên dương.

Bài 4. Cho biểu thức $A = \frac{x-1}{x^2}$ và $B = \frac{1}{x} - \frac{x}{2x+1} + \frac{2x^2-3x-1}{x(2x+1)}$ với $x \neq 0; x \neq \frac{-1}{2}; x \neq 1$

a) Tính giá trị của biểu thức A tại $x = 3$;

b) Rút gọn biểu thức B;

c) Đặt $C = A : B$. Chứng minh: $C \geq -1$.

Bài 5. Cho các biểu thức:

$$A = \frac{x}{x-4} \text{ và } B = \frac{2x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} - \frac{4}{1-x^2} \text{ với } x \neq 1; x \neq -1; x \neq 4.$$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 2$.

b) Chứng minh biểu thức $B = \frac{x-4}{x+1}$.

c) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức $P = AB$ có giá trị là số nguyên.

Bài 6. Cho biểu thức $A = \frac{x+1}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} + \frac{x^2+4x}{4-x^2}$ với $x \neq \pm 2$

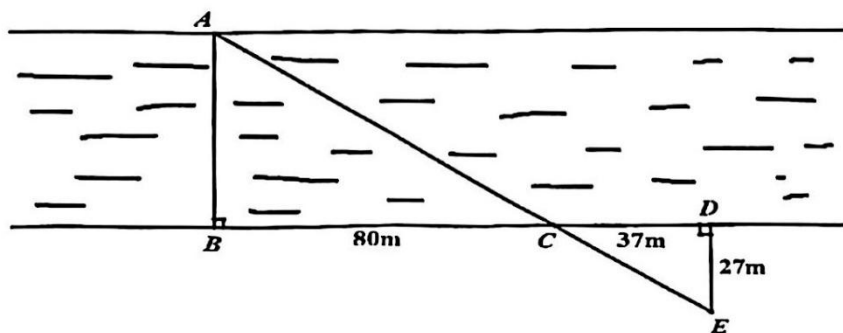
a) Rút gọn biểu thức A;

b) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 4$;

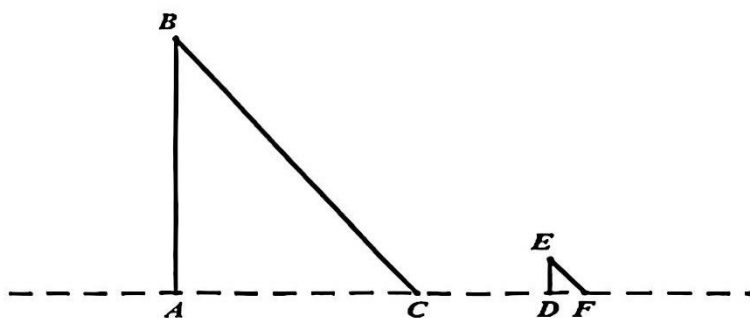
c) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên dương.

DẠNG 3: BÀI TẬP THỰC TẾ

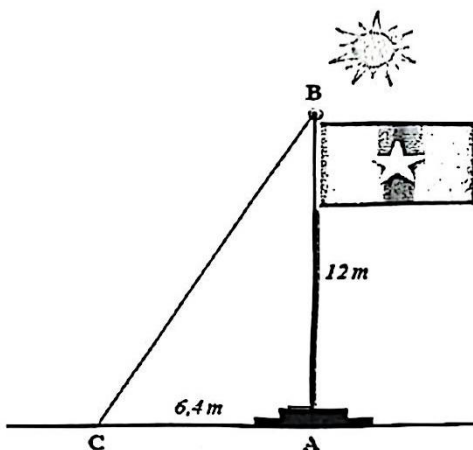
Bài 1. Để đo chiều rộng của khúc sông AB người ta dựng các điểm C; D; E như hình vẽ biết $BC = 80 \text{ m}$; $DE = 27 \text{ m}$; $CD = 37 \text{ m}$. Tính chiều rộng AB của khúc sông (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)



Bài 2. Một cột điện AB có bóng trên mặt đất dài 5 m, cùng lúc đó một cây cọc DE cao 1 m thì có bóng trên mặt đất là DF dài 0,7 m. Tính chiều cao của cột điện (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



Bài 3. Bóng của cột cờ trong sân trường chiếu trên mặt đất có độ dài $AC = 6,4$ m. Biết chiều cao của cột cờ là $AB = 12$ m. Tính khoảng cách BC từ đỉnh cột cờ đến đỉnh của bóng cột cờ chiếu trên mặt đất lúc đó.



DẠNG IV: BÀI TẬP HÌNH HỌC TỔNG HỢP

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB < AC$), đường cao AH . Từ H vẽ $HE \perp AB$ tại E , $HF \perp AC$ tại F .

- Chứng minh $\triangle AEH \sim \triangle AHB$;
- Chứng minh $AH^2 = AE \cdot AB$;
- Chứng minh $AH^2 = AF \cdot AC$;
- Chứng minh $HF^2 = AF \cdot CF$.

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ đường cao AH ($H \in BC$). Biết $BH = 4$ cm, $CH = 9$ cm

- Chứng minh $\triangle ABC \sim \triangle HBA$. Từ đó suy ra $AB^2 = BH \cdot BC$.
- Tính AB , AC

c) Đường phân giác BD cắt AH tại E ($D \in AC$). Chứng minh $\frac{EA}{EH} = \frac{DC}{DA}$.

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH .

- Chứng minh $\triangle ABC \sim \triangle HAC$;
- Chứng minh $\triangle AHB \sim \triangle CHA$;
- Từ H kẻ $HK \perp AC$ tại K . Chứng minh $\triangle AKH \sim \triangle AHC$;
- Chứng minh $HB \cdot HC = AK \cdot AC$.

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB < AC$). Vẽ các đường cao AH , BK cắt nhau tại I .

- Chứng minh $\triangle BKC \sim \triangle AHC$;
- Chứng minh $BK \cdot AC = AH \cdot BC$;
- Chứng minh $AK \cdot AC = AI \cdot AH$;
- Chứng minh $BI \cdot BK = BH \cdot BC$.

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại B , D là điểm nằm giữa B và C . Gọi H là hình chiếu của C trên đường thẳng AD .

- Chứng minh rằng: $\triangle ABD \sim \triangle CHD$, từ đó suy ra $AD \cdot DH = BD \cdot CD$.
- Chứng minh rằng: $\triangle BDH \sim \triangle ADC$.
- Hạ $DE \perp AC$ tại E . Chứng minh rằng: $AD \cdot AH + CB \cdot CD = AC^2$.
- Khi $\widehat{ADC} = 120^\circ$, so sánh S_{BDH} và S_{ADC} .

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH .

- Chứng minh $\triangle ABH \sim \triangle CBA$.
- Gọi E là điểm tùy ý trên cạnh AB , đường thẳng qua H và vuông góc với HE cắt cạnh AC tại F . Chứng minh $AE \cdot CH = AH \cdot FC$.
- Tìm vị trí của điểm E trên cạnh AB để tam giác EHF có diện tích nhỏ nhất.

Bài 7. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao BD ($D \in AC$). Kẻ DE vuông góc với BC tại E .

- Chứng minh $\triangle BDE \sim \triangle BCD$.
- Kẻ $DF \perp AB$ tại F . Chứng minh $BD^2 = BF \cdot BA$.
- Chứng minh $\widehat{BFE} = \widehat{BCA}$.
- Vẽ $CG \perp AB$ tại G . Đoạn thẳng EF cắt GD tại H . Chứng minh H là trung điểm của GD .

Bài 8. Cho tam giác, vuông tại A ($AB < AC$). Vẽ đường cao AH ($H \in BC$). Lấy điểm D sao cho H là trung điểm của BD .

- Chứng minh $\triangle ABC \sim \triangle HBA$.
- Qua C dựng đường thẳng vuông góc với tia AD , cắt AD tại E . Chứng minh $AH \cdot CD = CE \cdot AD$.
- Chứng minh $\triangle HDE \sim \triangle ADC$ và $BD \cdot AC = 2AD \cdot HE$.

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB < AC$. Lấy điểm H trên cạnh AC (điểm H khác điểm A và C). Gọi E là hình chiếu của điểm H trên cạnh BC .

a) Chứng minh: $\triangle ABC \sim \triangle EHC$ đồng dạng với tam giác.

b) Chứng minh: $\widehat{HBC} = \widehat{EAC}$.

c) Gọi I là giao điểm của đoạn AE và đoạn BH , chứng minh: $AB.HI = AI.HE$.

d) Qua I kẻ đường thẳng vuông góc với AB tại K . Lấy M thuộc tia đối tia KI sao cho $KM = KI$. Tìm vị trí điểm H trên cạnh AC để diện tích tứ giác $MACB$ gấp 4 lần diện tích tứ giác $IHCE$.

Bài 10. Cho tam giác nhọn ABC . Trên cạnh AB lấy điểm D không trùng với A và B . Qua D kẻ đường thẳng song song với BC cắt AC ở E . Qua C kẻ đường thẳng song song với AB cắt DE tại F . Nối BF cắt AC tại H .

a) Chứng minh $\triangle ABC \sim \triangle CFE$.

b) Chứng minh $\frac{HE}{HC} = \frac{EF}{DF}$.

c) Qua E kẻ đường thẳng song song với AB cắt AF tại I . Chứng minh:

$$\frac{1}{IE} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{CF}.$$

DẠNG V: BÀI TẬP VẬN DỤNG CAO

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi số thực x và y không âm ta có $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

Bài 2.

a) Tìm GTLN của biểu thức $A = \frac{2x^2 - 4x + 7}{x^2 - 2x + 2}$

b) Cho $x; y; z$ đôi một khác nhau thỏa mãn $\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} = 2024$.

Tính giá trị biểu thức:

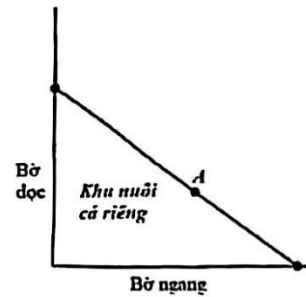
$$P = \frac{y^2}{x+y} + \frac{z^2}{y+z} + \frac{x^2}{z+x} - 2023$$

Bài 3. Bác Mạnh muốn đóng những chiếc bàn mà mặt bàn có dạng hình chữ nhật để phục vụ quán cà phê. Biết đường chéo của mặt bàn là 60 cm. Bác Mạnh phải chọn kích thước của mặt bàn là bao nhiêu cm để diện tích của mặt bàn lớn nhất (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Bài 4. Một cửa hàng phân phối bán ra 1000 sản phẩm mỗi năm. Mỗi lần đặt hàng có chi phí là 50 USD và chi phí lưu kho là 2 USD cho mỗi sản phẩm mỗi năm. Tính xem cửa hàng cần đặt mỗi lần bao nhiêu sản phẩm để chi phí đặt hàng và lưu kho thấp nhất?

Bài 5. Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 10 000 quả bóng. Công ty này sở hữu một số máy làm bóng giống nhau, mỗi máy có thể sản xuất 40 quả bóng mỗi giờ. Chi phí để thiết lập một máy là 200 nghìn đồng, khi đã được thiết lập mỗi máy sẽ hoạt động hoàn toàn tự động dưới sự giám sát của duy nhất một kĩ thuật viên. Chi phí để trả cho kĩ thuật viên là 180 nghìn đồng mỗi giờ. Hỏi công ty nên sử dụng bao nhiêu máy để chi phí sản xuất thấp nhất?

Bài 6. Người ta giăng lưới để nuôi riêng một loại cá trên một góc hồ. Biết rằng lưới được giăng theo một đường thẳng từ một vị trí trên bờ ngang đến một vị trí trên bờ dọc và phải đi qua một cái cọc đã cắm sẵn ở vị trí A. Hỏi diện tích nhỏ nhất có thể giăng là bao nhiêu biết rằng khoảng cách từ cọc đến bờ ngang là 5m và khoảng cách từ cọc đến bờ dọc là 12m?



Bài 7. Một trang tạp chí cần diện tích 384 cm^2 in chữ. Lề trên, lề dưới của trang đều bằng 3cm. Lề trái, lề phải của trang đều bằng 2cm. Hỏi chiều ngang và chiều dọc của trang tạp chí là bao nhiêu để trang tạp chí tốn ít diện tích giấy nhất?