

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh :.....

Câu 1. (2,5 điểm)

- a) Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn điều kiện: $a\sqrt{2} + \sqrt{b^2 + c^2} = 2\sqrt{a^2 + \frac{b^2 + c^2}{2}}$. Chứng minh rằng $\frac{a^2 + bc}{2}$ là số chính phương.
- b) Trong một trại hè kỹ năng, mỗi thành viên tham gia ít nhất một trong hai hoạt động: hoạt động Âm nhạc hoặc hoạt động Thể thao. Theo thống kê,
- 25% số thành viên tham gia hoạt động Thể thao cũng tham gia hoạt động Âm nhạc.
 - 10% số thành viên tham gia hoạt động Âm nhạc cũng tham gia hoạt động Thể thao.
 - Tổng số thành viên của trại hè lớn hơn 80 và nhỏ hơn 100.

Tính tổng số thành viên của trại hè.

Câu 2. (2,5 điểm)

- a) Tìm tất cả các số thực x sao cho trong bốn số $x + \sqrt{5}$, $x + \frac{4}{x}$, $x - \frac{4}{x}$ và $x^2 + 2\sqrt{5}$ có đúng một số không phải là số hữu tỉ.
- b) Cho các số thực dương a, b . Chứng minh $a + b + \frac{1}{4a(b+1)^2} > 1$.

Câu 3. (3,0 điểm) Cho đường tròn (O) và điểm P cố định nằm ngoài đường tròn. Qua O kẻ một đường thẳng d không trùng với OP , cắt (O) tại hai điểm A, B . Giả sử các đường thẳng PA, PB cắt (O) tương ứng tại các điểm thứ hai B', A' . Gọi C và D tương ứng là trực tâm các tam giác PAB và $PA'B'$. Chứng minh rằng

- a) $\frac{DA' + DB'}{CA + CB} = \frac{A'B'}{AB}$.
- b) Khi d thay đổi, điểm C luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

Câu 4. (1,0 điểm) Cho các số nguyên dương a, b thỏa mãn $|a - b| > 2025^3$. Với mỗi số nguyên dương k , đặt d_k là ước chung lớn nhất của hai số $a + k, b + k$. Chứng minh rằng $d_1 + \dots + d_{2026} < 2|a - b|$.

Câu 5. (1,0 điểm) Cho một bảng kẻ ô vuông 2026×2026 và một hộp đựng k viên sỏi (k là số nguyên dương). Gọi (i, j) là ô nằm ở hàng thứ i và cột thứ j , với $1 \leq i, j \leq 2026$ (ở đây, ô $(1, 1)$ là ô nằm ở góc trên cùng bên trái).

Ban đầu bảng không có sỏi. Ta được phép lấy từ hộp một viên sỏi đặt vào một ô trống (i, j) nếu ô này thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

- $j = 1$ hoặc ô $(i, j - 1)$ có sỏi.
- $i = 2026$ hoặc ô $(i + 1, j)$ có sỏi.

Ngoài ra, ta được phép lấy một viên sỏi bất kỳ trên bảng rồi bỏ vào hộp. Hỏi giá trị nhỏ nhất của k là bao nhiêu để có thể đạt được trạng thái là ô $(1, 2026)$ có sỏi?

I. HƯỚNG DẪN CHUNG

- 1) Nếu học sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng thì cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.
- 2) Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải đảm bảo không làm sai lệch hướng dẫn chấm và phải được thống nhất thực hiện trong tổ chấm.

II. ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1	a) Đặt $x = b^2 + c^2$ thì $a\sqrt{2} = 2\sqrt{a^2 + x} - \sqrt{x}$ do đó $2\sqrt{a^2 + x} = \sqrt{x} + a\sqrt{2}$. Bình phương hai vế, rút gọn cho ta $2a^2 + x = 2a\sqrt{2x}.$ Tiếp tục bình phương, $(2a^2 - x)^2 = 0$ hay $x = 2a^2$. Vậy ta có $b^2 + c^2 = 2a^2$. Từ đây suy ra b, c cùng tính chẵn lẻ và $\frac{a^2 + bc}{2} = \frac{(b + c)^2}{4}$ là bình phương của một số nguyên.	1,0
	b) Gọi S, M, B là số thành viên tham gia Thể thao, Âm nhạc và cả hai. Do mỗi thành viên đều tham dự ít nhất một hoạt động nên tổng số thành viên của trại hè là $N = S + M - B$. Theo giả thiết $B = 0,25S = \frac{S}{4}, \quad B = \frac{M}{10}.$	0,75
	Để B, S, M nguyên thì $S = 4k, B = k, M = 10k$ nên $N = 13k$. Theo đề bài $80 < 13k < 100$ nên $13k = 91$. Vậy tổng số thành viên là 91.	0,75

Câu	Nội dung	Điểm
2a	a) Giả sử rằng x là số thực sao cho: trong bốn số $m = x + \sqrt{5}$, $n = x + \frac{4}{x}$, $p = x - \frac{4}{x}$ và $q = x^2 + 2\sqrt{5}$ có đúng một số không phải là số hữu tỉ. Nếu x là số hữu tỉ thì m, q đồng thời là số vô tỉ, nên ta có hai số vô tỉ ở đây. Vậy x là số vô tỉ, do đó $n + p = 2x$ là số vô tỉ. Suy ra n, p không đồng thời là số hữu tỉ.	0,75
	Từ đó $x = m - \sqrt{5}$ và $q = (m - \sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5} = m^2 + 5 + 2\sqrt{5}(1 - m).$ Vậy $m = 1$ và $q = m^2 + 5 = 6$. Từ đó $x = 1 - \sqrt{5}$. Thử lại $x = 1 - \sqrt{5}$ thì $m = 1$, $n = -2\sqrt{5}$, $p = 2$ và $q = 6$. Do đó trong các số m, n, p, q có đúng một số là số vô tỉ.	0,75
2b	b) Theo bất đẳng thức AM-GM $a + b + \frac{1}{4a(b+1)^2} \geq \frac{1}{b+1} + b = \frac{1}{b+1} + (b+1) - 1 \geq 2 - 1 = 1.$	0,75
	Dấu bằng xảy ra nếu $b + 1 = 1$, hay $b = 0$ (loại vì $b > 0$). Vậy $a + b + \frac{1}{4a(b+1)^2} > 1.$	0,25
3a	a) Dễ thấy $CA'DB'$ là hình bình hành. Mặt khác, do $\triangle CA'B' \sim \triangle CAB$ nên $CA'.CA = CB'.CB$ suy ra $\frac{A'B'}{AB} = \frac{CA'}{CB} = \frac{CB'}{CA} = \frac{CA' + CB'}{CA + CB} = \frac{DA' + DB'}{CA + CB}.$	1,5

Câu	Nội dung	Điểm
3b	b) Kẻ $CQ \perp OP$. Ta có $\triangle CPQ \sim \triangle OPF$ nên $PC \cdot PF = PO \cdot PQ$. Mặt khác $PC \cdot PF = PA' \cdot PB = OP^2 - R^2$ không đổi. Vậy, Q cố định. Do đó, C nằm trên đường thẳng qua điểm Q cố định và vuông góc với OP cố định.	1,5
4	Ta có $d_k = \gcd(a + k, a - b)$ với mỗi k. Do đó $d_i \mid a - b$ với mỗi $i = 1, \dots, 2026$. Giả sử tồn tại các số d_i, d_j với $i \neq j$ sao cho $d_i, d_j \geq \frac{ a - b }{2025}.$ Ta viết $a - b = d_i x = d_j y$ thì x, y là các số nguyên dương và $x, y \leq 2025$. Từ đó $a + i = u \frac{ a - b }{x}, \quad a + j = v \frac{ a - b }{y}$ với u, v là các số nguyên dương. Suy ra $xy i - j = a - b uy - vx \neq 0.$ Vậy $uy - vx \geq 1$ nên $2025^3 < a - b \leq a - b uy - vx \leq xy i - j \leq 2025^2 \cdot 2025$ mâu thuẫn.	0,75

Câu	Nội dung	Điểm
	Vậy có tối đa một chỉ số i mà $d_i \geq \frac{ a-b }{2025}.$ Suy ra $d_1 + \dots + d_{2026} < a-b + \frac{ a-b }{2025} + \dots + \frac{ a-b }{2025} = 2 a-b .$	0,25
5	Đặt $n = 2026$. Đầu tiên, ta chứng minh $k = n + 1$ thoả mãn. Đầu tiên đặt sỏi như sau $(n, 1), (n, 2), \dots, (n, n) \rightarrow (n-1, 1).$ Vậy, toàn bộ sỏi nằm ở dòng thứ n và một viên nằm ở $(n-1, 1)$. $(n, 1) \rightarrow (n-1, 2); (n, 2) \rightarrow (n-1, 3); \dots; (n, n-1) \rightarrow (n-1, n); (n, n) \rightarrow (n-2, 1).$ Vậy, toàn bộ sỏi bây giờ nằm ở dòng thứ $n-1$ và một viên sỏi nằm ở $(n-2, 1)$. Cứ làm như vậy ta đưa được sỏi về $(1, 1), (2, 1), (2, 2), \dots, (2, n).$ Từ đó, ta chuyển sỏi $(2, 1) \rightarrow (1, 2), (2, 2) \rightarrow (1, 3), \dots, (2, n-1) \rightarrow (1, n).$ Vậy ta có thể đặt sỏi vào ô $(1, n)$ hay $(1, 2026)$.	0,5
	Ta chứng minh $k \geq n + 1$ bằng quy nạp theo $n \geq 2$. Khẳng định hiển nhiên với $n = 2$. Xét bảng $n \times n$ và giả sử k thoả mãn yêu cầu bài toán. Để có sỏi tại $(1, n)$ ta cần hai viên tại $(2, n)$ và $(1, n-1)$. Xét bảng vuông con A gồm các hàng $(1, \dots, n-1) \quad \text{và các cột} \quad (1, \dots, n-1);$ Bảng vuông con B gồm các hàng $(2, \dots, n) \quad \text{và các cột} \quad (2, \dots, n).$ Theo giả thiết quy nạp, để có sỏi tại $(2, n)$ của bảng B ta cần ít nhất n viên sỏi nằm trong B và do đó khác với viên nằm tại $(1, n-1)$. Thành thử số sỏi tối thiểu cần ít nhất $1 + n$.	0,5