

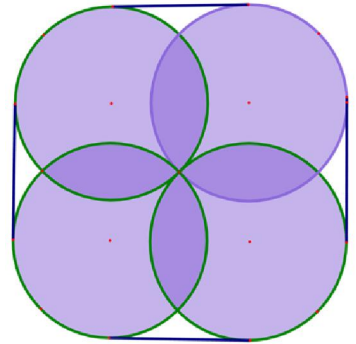
Câu I: (2 điểm)

1. Cho số $a = \sqrt{5+2\sqrt{4+\sqrt{5}}} + \sqrt{5-2\sqrt{4+\sqrt{5}}}$. Tính giá trị của biểu thức $T = \frac{a^3 - 8a + 3}{a^3 - 3a^2 - 2a + 2026}$

2. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^3 + y^3 - 3(x^2 + y^2) + 4(x + y) - 4 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = x^3 + y^3 + 2x^2y + 2xy^2$

Câu II: (1 điểm) Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \sqrt{y+91} = \sqrt{x-2} + y \\ 2y^5 - 2x^2y^4 - 2y^2 + (1+2x^2)y - x^2 = 0 \end{cases}$$

Câu III: (1 điểm) Ông A thuê thợ làm một mảnh vườn như hình vẽ bên. Trong đó, cả 4 hình tròn đều có bán kính bằng nhau và bằng 5 mét, cung tròn của đường tròn này nằm phía trong đường tròn kia đều có số đo bằng 90° . Trên mảnh vườn đó, 4 phần giao nhau của các cặp hình tròn được trồng hoa với giá tiền 50.000 đồng một mét vuông, 4 phần còn lại nằm phía trong các đường tròn được trồng cỏ với giá tiền 30.000 đồng một mét vuông. Toàn bộ chu vi các đường tròn và 4 đoạn thẳng nối bên ngoài được làm rào trang trí với giá tiền 20.000 đồng một mét chạy dài. Tính số tiền mà ông A phải trả cho thợ làm mảnh vườn đó (làm tròn đến hàng nghìn đồng).



Câu IV: (2 điểm)

- Cho số nguyên dương $n \geq 2$ và số nguyên tố lẻ p sao cho $p-1$ chia hết cho n và n^3-1 chia hết cho p . Chứng minh rằng $4p-3$ là số chính phương.
- Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho biểu thức $M = p^2 + 2025pq + q^2$ là một lũy thừa của 2027.

Câu V: (3 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O) . Gọi K là điểm sao cho AK là đường kính của (O) . Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H . Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại hai điểm P, Q (P và C nằm ở hai phía đối với đường thẳng AB). Gọi M là trung điểm BC .

- Chứng minh hai góc $\widehat{OAC}, \widehat{BAH}$ bằng nhau.
- Chứng minh $AP^2 = 2AD \cdot OM$.
- Dây KQ cắt BC tại L . Chứng minh hai đường thẳng AL, HQ cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF .

Câu VI: (1 điểm) Một bảng vuông gồm 11×11 ô vuông nhỏ, mỗi ô vuông nhỏ chứa nhiều nhất một viên sỏi. Tìm số viên sỏi bé nhất trên bảng sao cho khi ta chọn một ô trống bất kỳ, tổng số các viên sỏi trong hàng và cột tương ứng với ô trống này ít nhất là 11.

..... Hết

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Chữ kí của giám thị số 1 : Chữ kí của giám thị số 2:

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đáp án đề thi có 06 trang)

Năm học: 2026 - 2027

Môn thi: TOÁN CHUYÊN

(Dành cho học sinh thi vào chuyên Toán)

Ngày thi: 05/4/2026

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu I: (2 điểm)

1. (1.0 điểm) Cho số $a = \sqrt{5+2\sqrt{4+\sqrt{5}}} + \sqrt{5-2\sqrt{4+\sqrt{5}}}$. Tính giá trị của biểu thức

$$T = \frac{a^3 - 8a + 3}{a^3 - 3a^2 - 2a + 2026}$$

Giải: Ta có $a^2 = 5 + 2\sqrt{4+\sqrt{5}} + 5 - 2\sqrt{4+\sqrt{5}} + 2\sqrt{(5+2\sqrt{4+\sqrt{5}})(5-2\sqrt{4+\sqrt{5}})}$

$$= 10 + 2\sqrt{25 - 4(4+\sqrt{5})} = 10 + 2\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = 10 + 2\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}$$

$$= 10 + 2(\sqrt{5} - 2) = 6 + 2\sqrt{5}$$

(0.25 điểm)

$$\Rightarrow a^2 = (\sqrt{5} + 1)^2 \Rightarrow a = \sqrt{5} + 1 \text{ (do } a > 0 \text{)}$$

$$\Rightarrow a - 1 = \sqrt{5} \Rightarrow (a - 1)^2 = 5 \Rightarrow a^2 - 2a - 4 = 0$$

(0.25 điểm)

$$\text{Mặt khác: } T = \frac{a^3 - 8a + 3}{a^3 - 3a^2 - 2a + 2026} = \frac{a(a^2 - 2a - 4) + 2(a^2 - 2a - 4) + 11}{a(a^2 - 2a - 4) - (a^2 - 2a - 4) + 2022}$$

(0.25 điểm)

$$\text{Vì } a^2 - 2a - 4 = 0 \text{ nên } T = \frac{0 + 0 + 11}{0 - 0 + 2022} = \frac{11}{2022}$$

(0.25 điểm)

2. (1.0 điểm) Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^3 + y^3 - 3(x^2 + y^2) + 4(x + y) - 4 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = x^3 + y^3 + 2x^2y + 2xy^2$

Giải: Ta có: $x^3 + y^3 - 3(x^2 + y^2) + 4(x + y) - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow (x + y)(x^2 - xy + y^2) - 2(x^2 - xy + y^2) - (x^2 + 2xy + y^2) + 4(x + y) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - xy + y^2)(x + y - 2) - (x + y)^2 + 4(x + y) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - xy + y^2)(x + y - 2) - (x + y - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y - 2)[x^2 - xy + y^2 - (x + y - 2)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y - 2)(x^2 - xy + y^2 - x - y + 2) = 0$$

(0.25 điểm)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x + y - 2)(2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x + y - 2)[(x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + 2] = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y = 2 \text{ do } (x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + 2 > 0 \forall x, y$$

(0.25 điểm)

$$M = x^3 + y^3 + 2x^2y + 2xy^2 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) + 2xy(x + y) = (x + y)^3 - xy(x + y)$$

Thay $x + y = 2$ vào biểu thức M , ta được:

$$M = 2^3 - xy \cdot 2 = 8 - 2xy = 8 - 2x(2 - x) = 8 - 4x + 2x^2 = 2(x - 1)^2 + 6 \geq 6$$

(0.25 điểm)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$. Khi đó $y = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 6, đạt được khi $x = 1, y = 1$.

(0.25 điểm)

Câu II: (1 điểm) Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \sqrt{y+91} = \sqrt{x-2} + y \\ 2y^5 - 2x^2y^4 - 2y^2 + (1+2x^2)y - x^2 = 0 \end{cases}$$

Giải: Điều kiện $x \geq 2, y \geq -91$.

Ta có $2y^5 - 2x^2y^4 - 2y^2 + (1+2x^2)y - x^2 = 0 \Leftrightarrow 2y^5 - 2x^2y^4 - 2y^2 + 2x^2y + y - x^2 = 0$

$$\Leftrightarrow 2y^4(y-x^2) - 2y(y-x^2) + y - x^2 = 0 \Leftrightarrow (y-x^2)(y^4 - y + \frac{1}{2}) = 0 \quad (0.25 \text{ điểm})$$

Do $y^4 - y + \frac{1}{2} = y^4 - y^2 + \frac{1}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} = \left(y^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 > 0$ (vì dấu bằng không đồng thời xảy ra).

Nên ta có $y = x^2$ (0.25 điểm)

Thay vào phương trình đầu ta được phương trình $\sqrt{x^2+91} = \sqrt{x-2} + x^2$

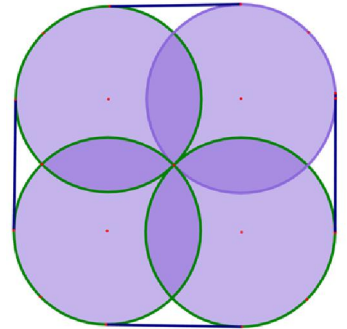
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+91} - 10 = \sqrt{x-2} - 1 + x^2 - 9 \Leftrightarrow \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+91}+10} - \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1} - (x^2-9) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \left(\frac{x+3}{\sqrt{x^2+91}+10} - \frac{1}{\sqrt{x-2}+1} - (x+3) \right) = 0 \quad (0.25 \text{ điểm})$$

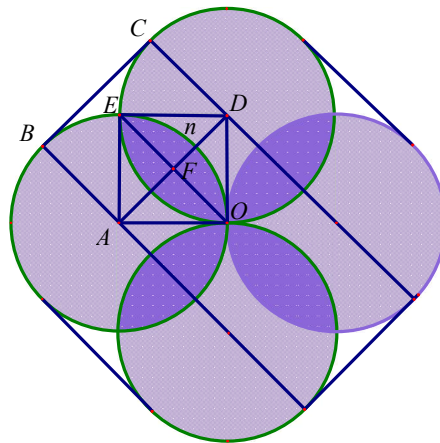
vì $x \geq 2 \Rightarrow \frac{x+3}{\sqrt{x^2+91}+10} < x+3 \Rightarrow \frac{x+3}{\sqrt{x^2+91}+10} - \frac{1}{\sqrt{x-2}+1} - (x+3) < 0$ nên phương trình trên chỉ có nghiệm $x = 3$.

Khi đó $y = 9$. Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (3; 9)$. (0.25 điểm)

Câu III: (1 điểm) Ông A thuê thợ làm một mảnh vườn như hình vẽ bên dưới. Trong đó, cả 4 hình tròn đều có bán kính bằng nhau và bằng 5 mét, cung tròn của đường tròn này nằm phía trong đường tròn kia đều có số đo bằng 90° . Trên mảnh vườn đó, 4 phần giao nhau của các cặp hình tròn được trồng hoa với giá tiền 50.000 đồng một mét vuông, 4 phần còn lại nằm phía trong các đường tròn được trồng cỏ với giá tiền 30.000 đồng một mét vuông. Toàn bộ chu vi các đường tròn và 4 đoạn thẳng nối bên ngoài được làm rào trang trí với giá tiền 20.000 đồng một mét chạy dài. Tính số tiền mà ông A phải trả cho thợ làm mảnh vườn đó (làm tròn đến hàng nghìn đồng).



Giải.



Gọi R là bán kính của mỗi hình tròn. Theo đề bài $R = 5$ m

Diện tích một hình viên phân bằng diện tích quạt tròn góc 90° trừ đi diện tích tam giác vuông cân tạo bởi

$$\text{hai bán kính, nên } S_{\text{viên phân}} = \frac{90^\circ}{360^\circ} \pi R^2 - \frac{1}{2} R^2 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) R^2 \quad (0.25 \text{ điểm})$$

Vì có 4 phần giao nhau, mỗi phần gồm 2 hình viên phân, nên diện tích phần trồng hoa là:

$$S_1 = 8 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) R^2 = (2\pi - 4) R^2 = (2\pi - 4) \cdot 25 = 50\pi - 100 \text{ (m}^2\text{)}$$

$$\text{Diện tích phần trống cỏ là: } S_2 = 4 \left(\pi R^2 - 4 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) R^2 \right) = 8R^2 = 8 \cdot 25 = 200 \text{ (m}^2\text{)} \quad (0.25 \text{ điểm})$$

Độ dài hàng rào trang trí gồm chu vi của 4 đường tròn và 4 đoạn thẳng ở ngoài. Ta có:

$$L = 4 \cdot 2\pi R + 4R\sqrt{2} = (8\pi + 4\sqrt{2}) R = (8\pi + 4\sqrt{2}) \cdot 5 = 40\pi + 20\sqrt{2} \text{ (m)} \quad (0.25 \text{ điểm})$$

$$\text{Tiền trồng hoa là } T_1 = 50000 \cdot S_1 = 50000(50\pi - 100)$$

$$\text{Tiền trồng cỏ là } T_2 = 30000 \cdot S_2 = 30000 \cdot 200 = 6000000$$

$$\text{Tiền làm rào là } T_3 = 20000 \cdot L = 20000(40\pi + 20\sqrt{2})$$

Vậy tổng số tiền ông A phải trả là:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 50000(50\pi - 100) + 6000000 + 20000(40\pi + 20\sqrt{2}) \approx 11932941$$

$$\text{Làm tròn đến đơn vị nghìn đồng: } T \approx 11.933.000 \text{ đồng.} \quad (0.25 \text{ điểm})$$

Câu IV: (2 điểm)

1. (1.0 điểm) Cho số nguyên dương $n \geq 2$ và số nguyên tố lẻ p sao cho $p-1$ chia hết cho n và $n^3 - 1$ chia hết cho p . Chứng minh rằng $4p-3$ là số chính phương.

Giải. Vì $p-1 \vdots n$ và $n \geq 2$, ta có $p \geq 3$. Nếu $p=3$ thì $2 \vdots n$, suy ra $n=2$. Khi đó $n^3 - 1 = 7$ không chia hết cho 3, trái giả thiết. Vậy $p \geq 5$.

Do $p-1 \vdots n$, ta có $1 \leq n-1 < n \leq p-1 < p$. Từ giả thiết $n^3 - 1 \vdots p$ và đẳng thức $n^3 - 1 = (n-1)(n^2 + n + 1)$ ta suy ra $n-1$ không chia hết cho p , nên $n^2 + n + 1 \vdots p$ (0.25 điểm)

Ta sẽ chứng minh $p = n^2 + n + 1$.

Đặt $p-1 = qn$, trong đó q là số nguyên dương.

Trường hợp 1: $n \leq \sqrt{p}$

Khi đó $0 < n^2 + n + 1 \leq p + \sqrt{p} + 1 < 2p$.

Vì $n^2 + n + 1 \vdots p$ nên số nguyên dương $n^2 + n + 1$ là bội của p và nhỏ hơn $2p$. Do đó $n^2 + n + 1 = p$. (0.25 điểm)

Trường hợp 2: $n > \sqrt{p}$

Từ $p-1 = qn$, suy ra $q = \frac{p-1}{n} < \sqrt{p}$.

Mặt khác, $n = \frac{p-1}{q} \Rightarrow nq = p-1$. Từ $n^2 + n + 1 \vdots p \Rightarrow n^2 q^2 + nq^2 + q^2 \vdots p$ suy ra $(p-1)^2 + q(p-1) + q^2 \vdots p$

khai triển ta sẽ được $q^2 - q + 1 \vdots p$.

Nhưng do $q < \sqrt{p}$, ta có $0 < q^2 - q + 1 \leq q^2 < p$.

Điều này là không thể, vì p không thể chia hết cho một số nguyên dương nhỏ hơn chính nó. Vậy trường hợp 2 này không xảy ra.

Từ hai trường hợp trên, suy ra $p = n^2 + n + 1$. (0.25 điểm)

$$\text{Do đó } 4p-3 = 4(n^2 + n + 1) - 3 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2.$$

Vì thế $4p-3$ là số chính phương. (0.25 điểm)

2. (1.0 điểm) Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho biểu thức $M = p^2 + 2025pq + q^2$ là một lũy thừa của 2027.

Giải: Giả sử $p^2 + 2025pq + q^2 = 2027^n$ (với $n \in \mathbb{N}$). Biến đổi biểu thức này ta được:

$$(p^2 - 2pq + q^2) + 2027pq = 2027^n \Leftrightarrow (p-q)^2 + 2027pq = 2027^n$$

Vì p, q là các số nguyên tố nên $p \geq 2$ và $q \geq 2$. Do đó $2027pq \geq 4 \times 2027 > 2027$. Suy ra $(p-q)^2 + 2027pq > 2027$, dẫn đến $2027^n > 2027$. Vì n là số tự nhiên nên ta phải có $n \geq 2$. Khi $n \geq 2$, ta luôn có $2027^n : 2027^2$. (0.25 điểm)

Từ phương trình $(p-q)^2 + 2027pq = 2027^n$, ta chuyển về $(p-q)^2 = 2027^n - 2027pq$

Ta nhận thấy cả 2027^n và $2027pq$ đều chia hết cho 2027, suy ra $(p-q)^2 : 2027$. Vì 2027 là số nguyên tố ta suy ra $(p-q) : 2027$. Và vì thế $(p-q)^2 : 2027^2$.

Quay lại biến đổi phương trình ban đầu $2027pq = 2027^n - (p-q)^2$

Lúc này, về phải có $2027^n : 2027^2$ (do $n \geq 2$) và $(p-q)^2 : 2027^2$ (vừa chứng minh trên). Suy ra hiệu của chúng chia hết cho 2027^2 , hay $2027pq : 2027^2 \Rightarrow pq : 2027$

Vì $p, q, 2027$ đều là các số nguyên tố suy ra $p = 2027$ hoặc $q = 2027$. (0.25 điểm)

Không mất tính tổng quát, giả sử $p = 2027$. Theo chứng minh ở trên, ta có $(p-q) : 2027$. Thay $p = 2027$ vào, ta được $(2027-q) : 2027$. Điều này có nghĩa là $2027-q = k \times 2027$ (với k là một số nguyên) $\Leftrightarrow q = 2027 - k \times 2027 = 2027(1-k)$. Vì q là số nguyên tố nên $q > 0$, suy ra $1-k > 0 \Rightarrow k \leq 0$.

Nếu $k < 0$, thì $(1-k) \geq 2$, khi đó $q = 2027(1-k)$ là một hợp số (mâu thuẫn vì q là số nguyên tố).

Nếu $k = 0$, thì $q = 2027$ (thỏa mãn). Vậy ta được $q = 2027$. (0.25 điểm)

Tương tự, nếu giả sử $q = 2027$ từ đầu, ta cũng chứng minh được $p = 2027$. Vậy ta có nghiệm duy nhất là $p = q = 2027$.

Thử lại: Với $p = q = 2027$, thay vào biểu thức ban đầu ta có: $M = 2027^2 + 2025 \times 2027^2 + 2027^2 = 2027^3$ đúng là một lũy thừa của 2027.

Kết luận: Có duy nhất một cặp số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu bài toán là $p = 2027$ và $q = 2027$.

(0.25 điểm)

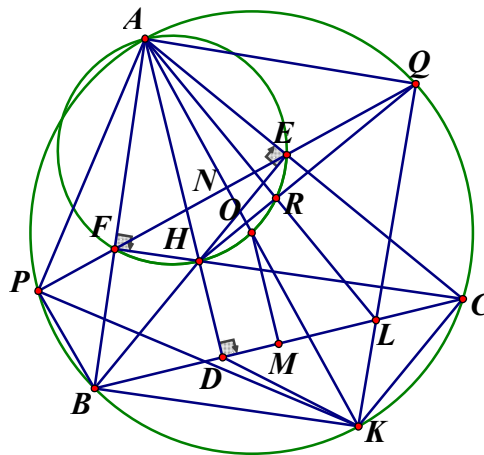
Câu V: (3 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O) . Gọi K là điểm sao cho AK là đường kính của (O) . Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H . Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại hai điểm P, Q (P và C nằm về hai phía đối với đường thẳng AB). Gọi M là trung điểm BC .

1. Chứng minh hai góc $\widehat{OAC}, \widehat{BAH}$ bằng nhau.

2. Chứng minh $AP^2 = 2AD \cdot OM$.

3. Dây KQ cắt BC tại L . Chứng minh AL, HQ cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF .

Giải:



1. (1.0 điểm) Chứng minh $\angle OAC = \angle BAH$

Trước hết, vì $CK \perp AC$ và $BH \perp AC$ nên $BH \parallel CK$.

Tương tự, vì $BK \perp AB$ và $CH \perp AB$ nên $CH \parallel BK$. (0.25 điểm)

Xét hai tam giác vuông ABD và AKC : $\angle ADB = 90^\circ$; $\angle ACK = 90^\circ$; do B, D, C thẳng hàng, ta có $\angle ABD = \angle ABC$;

Trên đường tròn (O) , hai góc nội tiếp chắn cung AC bằng nhau, nên $\angle ABC = \angle AKC$. (0.25 điểm)

Vậy $\triangle ABD \sim \triangle AKC$. Suy ra $\angle BAD = \angle KAC$. (0.25 điểm)

Mà A, D, H thẳng hàng và A, O, K thẳng hàng, nên $\angle BAH = \angle BAD = \angle KAC = \angle OAC$.

Suy ra điều phải chứng minh. (0.25 điểm)

2. (1.0 điểm) Chứng minh $AP^2 = 2AD \cdot OM$

Gọi $N = AK \cap EF$. Vì $\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$ nên tứ giác $BCEF$ nội tiếp.

Do đó $\angle AEF = \angle CBF = \angle ABC$. Theo câu 1, $\angle KAC = \angle BAH$.

Lại có $AH \perp BC$, nên $\angle BAH = 90^\circ - \angle ABC$. Suy ra $\angle KAC + \angle AEF = 90^\circ$.

Vì A, K, O thẳng hàng nên $AK \perp EF$. (0.25 điểm)

Mà $P, Q \in EF$, suy ra $AK \perp PQ$ tại N . Vì AK là đường kính của (O) nên đường thẳng qua tâm O vuông góc với dây PQ đi qua trung điểm của PQ ; do đó $PN = QN$, và vì thế $AP = AQ$.

Xét tam giác vuông APK , do $PN \perp AK$ nên PN là đường cao ứng với cạnh huyền AK . Bởi hệ thức lượng trong tam giác vuông, $AP^2 = AN \cdot AK$.

Mặt khác, xét hai tam giác ANF và ABK : $\angle ANF = 90^\circ$ vì $AK \perp EF$; $\angle ABK = 90^\circ$ vì AK là đường kính; $\angle NAF = \angle KAB$. Vậy $\triangle ANF \sim \triangle ABK$, nên $\frac{AN}{AB} = \frac{AF}{AK}$.

Suy ra $AN \cdot AK = AF \cdot AB$. (0.25 điểm)

Tiếp theo, xét hai tam giác AFH và ADB : $\angle AFH = 90^\circ$; $\angle ADB = 90^\circ$; $\angle FAH = \angle DAB$.

Vậy $\triangle AFH \sim \triangle ADB$, nên $\frac{AF}{AD} = \frac{AH}{AB}$. Suy ra $AF \cdot AB = AD \cdot AH$.

Từ các hệ thức trên, ta được $AP^2 = AD \cdot AH$. (0.25 điểm)

Ta thấy $BHCK$ là hình bình hành, vì M là trung điểm của BC nên M cũng là trung điểm của HK .

Trong tam giác AHK , điểm O là trung điểm của AK , còn M là trung điểm của HK . Do đó $AH = 2OM$.

Thế vào hệ thức $AP^2 = AD \cdot AH$, ta được $AP^2 = 2AD \cdot OM$. (0.25 điểm)

3. (1.0 điểm) Chứng minh AL và HQ cắt nhau tại một điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF

Gọi ω là đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF .

Vì $AE \perp EH$ và $AF \perp FH$, nên A, E, H, F cùng thuộc đường tròn đường kính AH . Do đó ω chính là đường tròn đường kính AH .

Gọi R là giao điểm thứ hai của đường thẳng AL với ω .

Khi đó $\angle ARH = 90^\circ$. (0.25 điểm)

Xét hai tam giác ARH và ADL : $\angle ARH = 90^\circ$; $\angle ADL = 90^\circ$ vì $AD \perp BC$ và $L \in BC$; $\angle RAH = \angle DAL$ vì A, R, L thẳng hàng và A, H, D thẳng hàng.

Vậy $\triangle ARH \sim \triangle ADL$, nên $\frac{AR}{AD} = \frac{AH}{AL}$. Suy ra $AR \cdot AL = AH \cdot AD$. Theo câu 2, $AH \cdot AD = AP^2$.

Lại có $AP = AQ$, nên $AR \cdot AL = AQ^2$. Do đó $\frac{AR}{AQ} = \frac{AQ}{AL}$.

Xét hai tam giác ARQ và AQL : $\angle QAR = \angle QAL$ vì A, R, L thẳng hàng; $\frac{AR}{AQ} = \frac{AQ}{AL}$.

Vậy $\triangle ARQ \sim \triangle AQL$. Suy ra $\angle ARQ = \angle AQL$. (0.25 điểm)

Vì A, Q, K cùng thuộc đường tròn đường kính AK , nên $\angle AOK = 90^\circ$.

Mà Q, K, L thẳng hàng, nên $\angle AQL = 90^\circ$. Do đó $\angle ARQ = 90^\circ$. Suy ra $RQ \perp AL$.

Mặt khác, $\angle ARH = 90^\circ$ nên $RH \perp AL$ vì thế Q, R, H thẳng hàng. (0.25 điểm)

Vậy R chính là giao điểm của AL và HQ , đồng thời $R \in \omega$. Nói cách khác, AL và HQ cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF . (0.25 điểm)

Câu VI: (1 điểm) Một bảng vuông gồm 11×11 ô, mỗi ô chứa nhiều nhất một viên sỏi. Tìm số viên sỏi bé nhất trên bảng sao cho: Khi chọn một ô trống bất kì, tổng số các viên sỏi trong hàng và cột tương ứng với ô trống này ít nhất là 11.

Giải: Gọi S là tổng số viên sỏi trên bảng. Xét một cách xếp bất kì thỏa mãn điều kiện đề bài. Kí hiệu r_i là số viên sỏi ở hàng thứ i và c_j là số viên sỏi ở cột thứ j . Đặt $k = \min\{r_1, r_2, \dots, r_{11}, c_1, c_2, \dots, c_{11}\}$.

Chọn một hàng hoặc một cột có đúng k viên sỏi. Không mất tính tổng quát, giả sử đó là một cột. Trong cột này có đúng k ô có sỏi và $11 - k$ ô trống. Ta đếm các hàng đi qua các ô ở cột này:

+) Các hàng đi qua k ô có sỏi

Mỗi hàng chứa một ô có sỏi của cột đã chọn đều có ít nhất k viên sỏi, vì k là số nhỏ nhất trong tất cả các số viên sỏi của các hàng và các cột.

Có tất cả k hàng như vậy, nên tổng số viên sỏi nằm trong các hàng này ít nhất là $k \times k = k^2$. (0.25 điểm)

+) Các hàng đi qua $11 - k$ ô trống

Xét một ô trống thuộc cột đã chọn. Cột này có đúng k viên sỏi, nên theo giả thiết của đề bài, hàng đi qua ô trống đó phải có ít nhất $11 - k$ viên sỏi. Nếu không, tổng số viên sỏi trong hàng và cột đi qua ô ấy sẽ nhỏ hơn 11. Vì có $11 - k$ hàng như vậy, nên tổng số viên sỏi nằm trong các hàng này ít nhất là

$$(11 - k)(11 - k) = (11 - k)^2. \quad (0.25 \text{ điểm})$$

+) Hai nhóm hàng trên gồm đúng toàn bộ 11 hàng của bảng và không giao nhau. Do đó

$$S = r_1 + r_2 + \dots + r_{11} \geq k^2 + (11 - k)^2 = 2 \left(k - \frac{11}{2} \right)^2 + \frac{121}{2} \geq \frac{121}{2}.$$

Suy ra $S \geq \frac{121}{2}$. Vì S là số nguyên nên $S \geq 61$. (0.25 điểm)

+) Ta chứng minh tồn tại một cách xếp dùng 61 viên sỏi thỏa mãn điều kiện đề bài.

Tô các ô của bảng xen kẽ như bàn cờ vua, sao cho bốn ô ở bốn góc đều cùng màu. Đặt một viên sỏi vào mỗi ô màu đen.

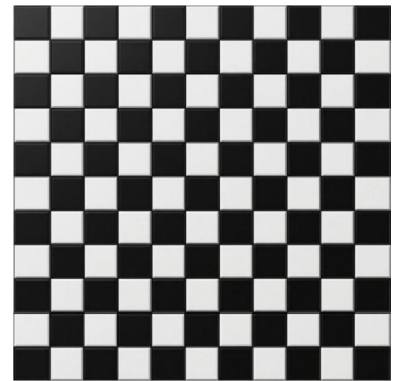
Vì bảng có kích thước lẻ nên số ô đen bằng $6 \times 6 + 5 \times 5 = 61$.

Mỗi hàng lẻ có 6 ô đen, mỗi hàng chẵn có 5 ô đen. Tương tự, mỗi cột lẻ có 6 ô đen và mỗi cột chẵn có 5 ô đen.

Mỗi ô trống là một ô màu trắng. Một ô trắng luôn nằm ở giao điểm của một hàng có 6 viên sỏi và một cột có 5 viên sỏi, hoặc ngược lại. Bởi vậy, với mọi ô trống, tổng số viên sỏi trong hàng và cột đi qua ô đó luôn bằng $6 + 5 = 11$. Như vậy tồn tại một cách xếp dùng 61 viên sỏi thỏa mãn điều kiện đề bài.

Kết luận: Số viên sỏi bé nhất là 61.

(0.25 điểm)



..... Hết