

I. LÝ THUYẾT

- 1) Các phép toán cộng, trừ, nhân, chia phân thức
- 2) Phương trình bậc nhất một ẩn
- 3) Giải toán bằng cách lập phương trình
- 4) Hàm số bậc nhất và đồ thị hàm số bậc nhất
- 5) Tam giác đồng dạng
- 6) Xác suất của biến cố, liên hệ giữa xác suất thực nghiệm với xác suất và ứng dụng.

II. BÀI TẬP

RÚT GỌN BIỂU THỨC

Bài 1. Cho biểu thức $A = \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} - \frac{3x+1}{x^2-1}$ với $x \neq -1, x \neq 1$.

- a) Rút gọn biểu thức A.
- b) Tính giá trị của A khi $x = 3$.
- c) Tìm giá trị của x để $A = \frac{1}{2}$.

Bài 2. Cho biểu thức $B = \left(\frac{x}{x+3} - \frac{2}{x-3} + \frac{x^2-1}{9-x^2} \right) : \left(2 - \frac{x+5}{3+x} \right)$ với $x \neq 3; x \neq -3; x \neq -1$

- a) Rút gọn biểu thức B.
- b) Tính giá trị của biểu thức B biết $|x| = 1$.
- c) Tìm các giá trị của x để biểu thức $B = \frac{3x-2}{2-x}$.

Bài 3. Cho biểu thức $P = \frac{2x-9}{x^2-5x+6} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x+1}{3-x}$ với $x \neq 2; x \neq 3$.

- a) Rút gọn P.
- b) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để P nhận giá trị nguyên.
- c) Tính giá trị của P khi $|x+1| = 3$.
- d) Tìm x để $P = \frac{1}{x-2}$.

Bài 4. Cho biểu thức $M = \frac{x+2}{x+3} - \frac{5}{x^2+x-6} + \frac{1}{2-x}$ với $x \neq -3; x \neq 2$.

- a) Chứng minh $M = \frac{x-4}{x-2}$.
- b) Tìm x biết $M = -3$.
- c) Tính giá trị của M biết $x^2+2x+1 = (3x-5)^2$.

Bài 5. Cho biểu thức: $Q = \left(1 - \frac{x-11}{x+1}\right) : \left(\frac{3+x}{x-3} - \frac{36}{9-x^2} - \frac{x-3}{x+3}\right)$ với $x \neq 3; x \neq -3$

- a) Rút gọn Q. b) Tính giá trị của Q biết $2x^2 + 6x = 0$. c) Tìm x để $Q = -x$.

Bài 6. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{2+x}{2-x} - \frac{4x^2}{x^2-4} - \frac{2-x}{2+x}\right) : \frac{x^2-3x}{2x^2-x^3}$ với $x \neq -2; x \neq 0; x \neq 2; x \neq 3$

- a) Rút gọn P.
b) Tính giá trị của P biết $|x-5|=2$.
c) Tìm x thỏa mãn $P = -8$.
d) Tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của A chia hết cho 4.
e) Tìm giá trị nhỏ nhất của A với $x > 3$.
f) Tìm x để $P = A(x-3) + x$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 7. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-1}{x^2-2x} + \frac{x+1}{x^2+2x} - \frac{4}{x^3-4x}\right) : \left(1 - \frac{2}{x}\right)$.

- a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P.
b) Tính giá trị của biểu thức P biết x là số thực thỏa mãn điều kiện $|2x-1|=5$.

Bài 8. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x+1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{2-x^2}{x^2-x}\right) : \frac{x}{x-1}$ với $x \neq 0; x \neq 1$.

- a) Tìm điều kiện của x để giá trị của P xác định và chứng minh $P = \frac{x+1}{x^2}$.
b) Tính giá trị của P với x thỏa mãn $|2x-1|=3$.
c) Tìm x để $P = \frac{3}{x+2}$.

Bài 9. Cho biểu thức $P = \frac{x^2-3x+2}{x^2-6x+9} : \left(\frac{x-1}{x-2} - \frac{1}{3-x} + \frac{-x^2+4x-2}{x^2-5x+6}\right)$ với $x \neq 2; x \neq 3$.

- a) Rút gọn P. b) Tính giá trị của P khi $x^2 - 2x = 3$. c) Tìm x để $P = 4$.

Bài 10. Cho biểu thức $A = \left(\frac{3x}{x-2} + \frac{2}{x+2} - \frac{14x-4}{x^2-4}\right) : \frac{x(x-1)}{x+2}$ với $x \neq -2; x \neq 0; x \neq 1; x \neq 2$.

- a) Rút gọn biểu thức A.
b) Tính giá trị của A khi $x^2 - 6x = -9$.
c) Tính giá trị của A khi $3x-1-|x-3|=x+6$.
d) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.
e) Tìm x để $A^2 - A + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất.

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Bài 11. Giải phương trình

a) $(x-2)^3 - 6x(3-x) = (x-1)(x^2+x+1)$

b) $(x-1)(x+1) - 3(x-2)^2 = (1-2x)(x+1) - 3$

c) $(3x^2-7)(x+3) = 15+5x$

d) $6x^2+x-2=0$

e) $x^3-3x^2+3x=9$

f) $x^3-4x^2-3x+18=0$

g) $x^2-2x+1=\frac{2x-2}{5}$

h) $\frac{x}{2} - \frac{6-x}{5} = \frac{x+3}{4} - x + 1$

i) $\frac{x-1}{2} + \frac{1-3x}{3} = \frac{2x+5}{4} - 2 + x$

j) $\frac{(2x-3)(2x+3)}{3} = \frac{5(x-1)^2}{6} + \frac{(x-3)^2}{2}$

k) $\frac{3x-1}{x-1} - \frac{2x+5}{x-3} = \frac{13-21x}{2(x^2-4x+3)}$

l) $\frac{x}{x-1} + \frac{2-x}{x+1} = \frac{7x+2}{1-x^2}$

m) $\frac{x+2}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x(x-2)}$

n) $|x+3| = 2x-1$

o) $|2-3x| + 5 = 2x$

p) $2x-3+2|x+1|=0$

q) $|2x+1|=|x-3|$

r) $(x^2-x-1)(x^2-x)-2=0$

s) $x^2-3x+4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC NHẤT

Bài 12. Cho hàm số $y=(m-3)x+5$.

a) Xác định giá trị của m để hàm số đi qua điểm $A(1; 2)$.

b) Vẽ đồ thị của hàm số ứng với giá trị của m tìm được ở câu trên.

Bài 13. Cho đường thẳng $y=(1-4m)x+m-2$. (d)

a) Với giá trị nào của m thì đường thẳng (d) đi qua gốc tọa độ?

b) Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) cắt trục tung tại một điểm có tung độ bằng $\frac{3}{2}$.

c) Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) cắt trục hoành tại một điểm có hoành độ bằng $\frac{1}{2}$.

Bài 14. Xác định hàm số bậc nhất $y=ax+b$ trong mỗi trường hợp sau:

a) Đồ thị hàm số đi qua $A(-1;2), B(2;-3)$.

b) Có hệ số góc là -2 và đi qua điểm $C(1;5)$.

c) Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ và điểm $D(-1;3)$.

Bài 15. Tìm hàm số có đồ thị thỏa mãn các điều kiện sau:

a) Đi qua điểm $B(-1;8)$ và song song với đường thẳng $y=4x+3$.

b) Đồ thị hàm số có hệ số góc là 2 và cắt trục tung tại điểm có tung độ là 2 .

- c) Song song với đường thẳng $y = -x + 5$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.
- d) Đồ thị của hàm số vuông góc với đường thẳng $y = \frac{-1}{3}x + 1$ và đi qua A (2; 5).

Bài 16. Cho hai đường thẳng $y = 3x + m - 1$ và $y = (m^2 - 1)x + 2m - 3$. Tìm điều kiện của m để:

- a) Hai đường thẳng cắt nhau.
- b) Hai đường thẳng song song với nhau.
- c) Hai đường thẳng trùng nhau.

Bài 17. Cho đường thẳng $(d_1): y = (m - 1)x + 2m + 1$.

- a) Tìm m để đường thẳng (d_1) cắt trục tung tại điểm có tung độ là -3 .
- b) Vẽ đồ thị hàm số vừa tìm được và chứng tỏ giao điểm đồ thị vừa tìm được với đường thẳng $(d): y = x + 1$ nằm trên trục hoành.

Bài 18. Cho hàm số $y = (2 - m)x + m + 1$ (m là tham số, $m \neq 2$) có đồ thị là đường thẳng d.

- a) Tìm m để d cắt đường thẳng $y = 2x - 5$ tại điểm có hoành độ bằng 2.
- b) Tìm m để d cùng với các trục tọa độ Ox, Oy tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2.

Bài 19. Cho 3 đường thẳng $(d_1): y = 2x + 3; (d_2): y = -x + 4; (d_3): y = mx + m - 1$

- a) Vẽ hai đường thẳng $(d_1); (d_2)$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
- b) Tìm tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) .
- c) Tìm m để ba đường thẳng $(d_1); (d_2); (d_3)$ đồng quy.

Bài 20. Cho đường thẳng $(d): y = \frac{m}{2m - 3}x + m - 2 \left(m \neq \frac{3}{2} \right)$. Tìm m để đường thẳng (d) cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho tam giác OAB cân.

Bài 21. Cho đường thẳng $(d) y = (m + 1)x + 2m - 2$.

- a) Tìm m để đường thẳng d đi qua điểm M(1;5).
- b) Tìm tọa độ giao điểm M của (d) với đường thẳng $(d'): y = -4x - 5$.
- c) Gọi A, B là giao điểm của (d) và (d') với trục Oy. Tính diện tích tam giác MAB.

GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

Bài 22. Một người đi xe đạp từ A đến B với vận tốc 15 km/h. Lúc về người đó đi với vận tốc 12 km/h nên thời gian về lâu hơn thời gian đi là 30 phút. Tính quãng đường AB?

Bài 23. Lúc 7 giờ sáng, một xe máy khởi hành từ tỉnh A để đi đến tỉnh B. Sau 30 phút, một ô tô cũng khởi hành từ A để đi đến B với vận tốc lớn hơn vận tốc xe máy là 10 km/h và hai xe gặp nhau lúc 10 giờ 30 phút. Tính vận tốc của xe máy và ô tô?

Bài 24. Một xe tải đi từ A đến B với vận tốc 50km/h. Sau khi đi được 30 phút thì gặp đường xấu nên trên quãng đường còn lại vận tốc giảm còn 35km/h, vì vậy đến B chậm 18 phút so với dự định. Tính quãng đường AB.

Bài 25. Một người đi xe máy từ A đến B với vận tốc 50 km/h. Sau khi đến B, người đó quay trở về A theo đường khác dài hơn 2 km với vận tốc giảm 10 km/h, nên thời gian về nhiều hơn thời gian đi 18 phút. Tính quãng đường lúc đi từ A đến B.

Bài 26. Lúc 7 giờ sáng, một người đi xe đạp khởi hành từ A với vận tốc 10 km/h. Sau đó lúc 8 giờ 40 phút, một người khác đi xe máy khởi hành từ A đuổi theo với vận tốc 30 km/h. Hỏi hai người gặp nhau lúc mấy giờ?

Bài 27. Một ca nô chạy trên khúc sông từ A đến B. Biết rằng khi xuôi dòng từ A đến B thì ca nô chạy mất 8 giờ, khi ngược dòng từ B về A thì mất 10 giờ. Tính vận tốc riêng của ca nô, biết vận tốc dòng nước là 4km/h.

Bài 28. Một xưởng may được đặt hàng may một số lượng áo đồng phục học sinh. Mỗi ngày xưởng may dự định may được 100 cái áo. Trên thực tế, số áo mỗi ngày xưởng sản xuất được là 120 cái, do đó xưởng không những đã hoàn thành trước thời hạn 1 ngày mà còn vượt chỉ tiêu 20 sản phẩm. Hỏi xưởng may được đặt hàng may bao nhiêu cái áo theo dự định?

Bài 29. Hai đội máy cày cùng cày trên một cánh đồng hết 12 ngày, nếu đội 1 làm một mình 8 ngày rồi nghỉ, đội 2 làm tiếp một mình thì 15 ngày nữa là cày xong. Hỏi nếu mỗi đội cày trên cánh đồng đó thì hết bao nhiêu ngày ?

Bài 30. Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi là 48 m. Nếu tăng chiều rộng lên 4 lần và chiều dài lên 3 lần thì chu vi của khu vườn sẽ là 162 m. Hãy tìm diện tích của khu vườn ban đầu.

Bài 31. Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi 160 m. Nếu tăng chiều rộng thêm 10 m và giảm chiều dài đi 10 m thì diện tích tăng thêm 200m^2 . Tính kích thước mảnh đất ban đầu.

Bài 32. Hai tổ sản xuất phải dệt 140 áo len. Trong thực tế, tổ 1 đã vượt mức 10% so với kế hoạch của mình, tổ 2 vượt mức 5% kế hoạch nên cả hai tổ dệt được 150 áo len. Hỏi theo kế hoạch, mỗi tổ phải dệt bao nhiêu áo len?

Bài 33. Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do áp dụng kĩ thuật mới nên tổ I đã sản xuất vượt mức kế hoạch 18% và tổ II vượt mức 21%. Vì vậy, trong thời gian quy định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm được giao của mỗi tổ là bao nhiêu?

Bài 34. Cô Hà đầu tư 400 triệu đồng vào hai khoản: mua trái phiếu doanh nghiệp với lãi suất 8% một năm và gửi tiết kiệm ngân hàng với lãi suất 7,5% một năm. Cuối năm, cô Hà nhận về 431,4 triệu đồng cả gốc và lãi. Hỏi cô Hà đã đầu tư mỗi khoản bao nhiêu tiền?

Bài 35. Cần trộn bao nhiêu gam dung dịch muối ăn nồng độ 5% với bao nhiêu gam dung dịch muối ăn nồng độ 20% để được 400 g dung dịch muối ăn nồng độ 8% ?

XÁC XUẤT CỦA BIẾN CỐ

Bài 36. Thống kê thời gian của 80 chương trình quảng cáo trên đài truyền hình tỉnh C cho kết quả như sau:

Thời gian quảng cáo	Số chương trình quảng cáo
Từ 0 – 19 giây	12
Từ 20 – 39 giây	40
Từ 40 – 59 giây	24
Trên 60 giây	4

Tính xác suất thực nghiệm của các biến cố sau:

- a) A : “Chương trình quảng cáo của đài truyền hình tỉnh C kéo dài trên 1 phút”.
- b) B : “Chương trình quảng cáo của đài truyền hình tỉnh C kéo dài trong khoảng từ 20 đến 59 giây”.

Bài 37. Một cỗ máy gieo một xúc xắc cân đối, đồng chất 30 lần liên tiếp, 5 lần xuất hiện mặt 4 chấm.

- a) Tính xác suất thực hiện biến cố A: “Mặt xuất hiện của xúc xắc là mặt 4 chấm”.
- b) Giả sử cỗ máy gieo xúc xắc 12000 lần liên tiếp. Dự đoán số lần xuất hiện mặt 4 chấm.

Bài 38. Bạn Lan gieo một con xúc xắc 6 mặt cân đối 60 lần liên tiếp và thống kê được kết quả như sau:

Mặt	1 chấm	2 chấm	3 chấm	4 chấm	5 chấm	6 chấm
Số lần xuất hiện	14	18	9	7	6	6

Tính xác suất thực nghiệm của biến cố: “Mặt xuất hiện của xúc xắc là mặt có số chấm không chia hết cho 3”.

Bài 39. Một túi đựng các quả cầu có kích cỡ giống nhau, khác nhau về màu, trong đó có 25 quả màu đỏ, 40 quả màu tím, 12 quả màu vàng, 10 quả màu trắng và 15 quả màu đen. Lấy ngẫu nhiên một quả cầu trong túi. Tính xác suất để:

- a) Lấy được quả màu đỏ.
- b) Lấy được quả màu tím hoặc vàng.
- c) Lấy được quả không phải màu đen.

Bài 40. Trong một nhóm đi cắm trại có 16 học sinh lớp 8A (10 nam, 6 nữ) và 14 học sinh lớp 8B (7 nam, 7 nữ). Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong nhóm. Tính xác suất của các biến cố sau:

- a) A: "Chọn được học sinh nữ".
- b) B: "Chọn được học sinh nam lớp 8A".
- c) C: "Chọn được học sinh nữ lớp 8B".

Bài 41. Chọn một số có hai chữ số, tính xác suất của các biến cố sau:

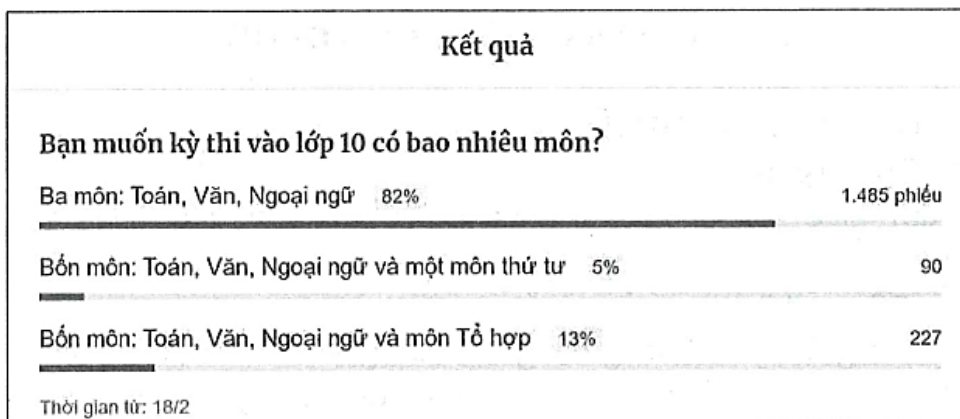
- a) Số được chọn chứa chữ số 5.

- b) Số được chọn có hai chữ số giống nhau.
c) Số được chọn lớn hơn 70.
d) Số được chọn không chứa chữ số 3.

Bài 42. Gieo đồng thời 2 con xúc xắc, tính xác suất của mỗi biến cố sau:

- a) Tổng số chấm xuất hiện trên 2 con xúc xắc từ 10 trở lên.
b) Tổng số chấm xuất hiện trên 2 con xúc xắc chia hết cho 3.
c) Tổng số chấm xuất hiện trên 2 con xúc xắc là một số nguyên tố.
d) Hiệu số chấm xuất hiện trên 2 con xúc xắc lớn hơn 4.

Bài 43. Liên quan đến kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 tại thành phố Hà Nội, Vnexpress.net đã lấy ý kiến độc giả và thu được kết quả như sau:



a) Tính xác suất biến cố người cho ý kiến thi 4 môn.

b) Theo thống kê của Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, tính đến học kỳ II năm học 2021-2022, toàn thành phố có 659 trường trung học cơ sở với hơn 522.000 học sinh. Hãy ước tính số học sinh cho ý kiến thi 3 môn trong đợt thi tuyển sinh vào 10 dựa vào tỉ lệ trên.

Bài 44. Thống kê số vụ tai nạn giao thông của tháng 9 của một thành phố A thu được kết quả như bảng sau:

Số vụ tai nạn giao thông trong 1 ngày	0	1	2	3	4	> 4
Số ngày	4	7	9	6	2	2

- a) Tính xác suất biến cố một ngày có ít hơn 3 vụ tai nạn.
b) Tính xác suất một ngày có nhiều hơn 3 vụ tai nạn.
c) Hãy dự đoán xem trong 3 tháng 10, 11, 12 tại thành phố A:
- Có bao nhiêu ngày có nhiều nhất 3 vụ tai nạn giao thông?
- Có bao nhiêu ngày không xảy ra tai nạn giao thông?

Bài 45. Một hộp có 20 thẻ cùng loại, mỗi thẻ ghi một trong các số 1; 2; 3; 4; ...; 20. Hai thẻ khác nhau thì ghi số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

- a) "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số có chữ số tận cùng là 2".
b) "Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số có một chữ số".

c) “ Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số có hai chữ số với tích các chữ số bằng 4”.

HÌNH HỌC

Bài 46. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) có đường cao AH. Lấy điểm D bất kì thuộc đoạn thẳng AH. Kẻ $CE \perp BD$ tại E. Qua E kẻ đường thẳng song song với AH cắt AC tại I.

a) Chứng minh $CE \cdot BH = DH \cdot BE$. b) Chứng minh $CE^2 = CI \cdot CA$.

c) Qua D kẻ đường thẳng song song với EC cắt BC tại M, gọi N là giao điểm của EI và DM.

Chứng minh: $\angle DNE = \angle EAC$.

d) Chứng minh $EM \perp NB$.

e) Chứng minh $DM \cdot DN = AB^2 - BD^2$.

Bài 47. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) đường cao AH. Kẻ $HE \perp AB$ tại E, $HF \perp AC$ tại F. Đường thẳng EF cắt BC tại D. Kẻ phân giác AP của góc $\angle BAC$ (P thuộc BC)

a) Chứng minh $AH^2 = AE \cdot AB$ b) Chứng minh $\triangle AEF$ đồng dạng với $\triangle ACB$.

c) Chứng minh $DH^2 = DE \cdot DF$ d) Chứng minh $AP^2 = AB \cdot AC - PB \cdot PC$

e) Kẻ $CI \parallel EH$ (I thuộc AB); CI cắt AH tại K. Chứng minh rằng $CK \cdot CI + AK \cdot AH = AC^2$.

Bài 48. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh $\triangle HEF$ đồng dạng với $\triangle HCB$. b) Chứng minh $\triangle DCF$ đồng dạng với $\triangle DEB$.

c) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BE, CF. Chứng minh $\triangle DMN$ đồng dạng với $\triangle ABC$.

Bài 49. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB < AC$, đường cao AH. Gọi K là điểm đối xứng của A qua H. Tia KB cắt AC tại T.

a) Chứng minh $HA \cdot HK = HB \cdot HC$

b) Đường thẳng qua A song song với BC cắt TK tại M. Kẻ $AN \perp TK$ tại N. Chứng minh:

1) $AT^2 = MT \cdot KT$

2) $MT \cdot KN = MN \cdot KT$

c) MC cắt AN ở E. Chứng minh $EA = EN$.

d) Kẻ $KQ \perp MC$ tại Q. Tia AQ cắt BC tại F. Chứng minh $FC = FH$.

Bài 50. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) đường cao AH, BM, CN cắt nhau tại T. Gọi I là trung điểm của BC; Q đối xứng với T qua I; MN cắt BC tại K.

a) Chứng minh $MH \cdot MN = MT \cdot MB$.

b) Chứng minh $AQ \perp MN$.

c) Chứng minh $KT \perp AI$.

Bài 51. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) đường cao AH, trung tuyến BD cắt nhau tại T. Kẻ $AK \perp BD$; $HI \perp AB$.

a) Chứng minh $DA \cdot DC = DK \cdot DB$ b) Chứng minh $\angle BKH = \angle DCB$; $\angle DCK = \angle DBC$.

c) Chứng minh $HK \cdot HA = HI \cdot AK$. d) DI cắt AK tại Q. Tia HQ cắt AC tại E. Chứng minh $AE = ED$.

Bài 52. Cho tam giác ABC nhọn, hai đường cao AD và BE cắt nhau tại điểm H.

a) Chứng minh rằng: $CE \cdot CA = CD \cdot CB$.

b) Chứng minh rằng: $\triangle CED$ đồng dạng với $\triangle CBA$.

c) Biết tia CH cắt cạnh AB tại điểm F, đoạn thẳng EF cắt đường cao AD tại điểm G. Chứng minh rằng: $\angle DEC = \angle FEA$ và $\frac{AG}{AD} = \frac{HG}{HD}$.

d) Từ D vẽ DM vuông góc với CF tại M, vẽ DN vuông góc với BE tại N. Chứng minh $MN \parallel EF$.

NÂNG CAO

Bài 53. Cho ba số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn $abc = 1$ và $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Tính giá trị biểu thức $P = (a-1)(b-1)(c-1)$.

Bài 54. Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{a^2 + c^2} = \frac{2c}{b+c}$. Chứng minh rằng bc là số chính phương.

Bài 55. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = 0$ và $a^2 = 2(a+c+1)(a+b-1)$. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2$.

Bài 56. Cho các số thực a, b, c đôi một phân biệt, khác 0 thỏa mãn $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$. Tính giá trị của biểu thức $P = abc$.

Bài 57. Cho hai số thực a, b phân biệt thỏa mãn $ab = a - b$. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$.

Bài 58. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b - 2c = 0$ và $(c+a)(c+b) = 4c^2$. Chứng minh rằng $a = b = c$.

Bài 59. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{4x^2 - 6x + 3}{2x^2 - 3x + 2}$ và $B = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1}$.

Bài 60. Cho hai số thực phân biệt a, b khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{3}{ab} = 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = (a-1)^{2025} (b-1)^{2025}$.

Bài 61. Cho 3 số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn $a + b + c \neq 0$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{1}{a^3 + b^3 + c^3}$.

Bài 62. Cho hai số thực phân biệt a, b khác 0. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} + \frac{16}{a+b} \geq 5 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$

Bài 63. Cho 3 số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} = a + b + c$. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \frac{a^2 + b^2}{(a+c)(b+c)} + \frac{b^2 + c^2}{(b+a)(c+a)} + \frac{c^2 + a^2}{(c+b)(a+b)}.$$

Bài 64. Giải phương trình: $(2023 - x)^3 + (2025 - x)^3 + (2x - 4048)^3 = 0$.

Bài 65. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $y^2 = x(x+1)(x+7)(x+8)$.

Bài 66. Ban quản lý một bãi tắm biển dùng 300m dây phao bao quanh một khu vực hình chữ nhật trên bãi biển để tạo thành “khu vực tắm biển an toàn”. Bờ biển sẽ tạo thành một cạnh của hình chữ nhật đó còn dây phao tạo thành ba cạnh của hình chữ nhật (như minh họa trên hình vẽ). Để đảm bảo an toàn người tắm biển chỉ được bơi cách bờ biển không quá 25m. Tính diện tích “khu vực tắm biển an toàn” **lớn nhất** mà ban quản lý bãi tắm có thể quy được, khi đó chiều dài bờ biển của “khu vực tắm biển an toàn” là bao nhiêu?



III. MỘT SỐ ĐỀ THAM KHẢO

ĐỀ LUYỆN SỐ 1

Bài 1. Cho biểu thức $A = \frac{x+2}{x^2-4x+3} + \frac{x}{3-x} + \frac{x}{x-1}$ ($x \neq 1; 3$)

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị biểu thức A khi $x^2 - 9 = 0$.

c) Tìm x để $A = \frac{-2}{3}$.

Bài 2. Cho các hàm số bậc nhất $(d_1): y = (m-1)x + n - 3$ và $(d_2): y = 2x - 1$

a) Xác định hàm số (d_1) , biết đường thẳng (d_1) song song với đường thẳng (d_2) và đi qua $A(1, 3)$.

b) Vẽ đồ thị hàm số (d_1) và (d_2) trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy.

Bài 3.

1. Hình bên mô tả một đĩa tròn bằng bìa cứng được chia làm tám phần bằng nhau và ghi các số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8. Chiếc kim được gắn cố định vào trục quay ở tâm của đĩa. Quay đĩa tròn một lần. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) “Mũi tên chỉ vào hình quạt ghi số nhỏ hơn 6.”

b) “Mũi tên chỉ vào hình quạt ghi số chia 4 dư 2.”

c) “Mũi tên chỉ vào hình quạt ghi số là bội của 3.”



2. Quãng đường AB dài 200km, lúc 7 giờ xe máy xuất phát từ A đến B với vận tốc 40km/h. Sau khi xe máy đi được 30 phút, một xe ô tô xuất phát từ B đến A với vận tốc 50km/h. Hỏi hai xe gặp nhau lúc mấy giờ?

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ có tia phân giác $\widehat{ABC}$ cắt AC tại K. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC và cắt tia BK tại E. Qua E kẻ đường thẳng song song với AB và cắt BC tại F, EF cắt AC tại I. Chứng minh:

a) Tứ giác AEFB là hình thoi.

b) $\triangle AIE$ đồng dạng với $\triangle CAB$.

c) $AK^2 = KI \cdot KC$.

d) $\frac{1}{AK} = \frac{1}{AI} + \frac{1}{AC}$.

Bài 5. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 + 2xy + 7(x+y) + 2y^2 + 10 = 0$.

ĐỀ LUYỆN SỐ 2

Bài 1. Cho biểu thức $M = \frac{x+2}{x+3} - \frac{5}{x^2+x-6} + \frac{1}{2-x}$ với $x \neq -3; x \neq 2$

a) Chứng minh $M = \frac{x-4}{x-2}$.

b) Tìm x để $M = -1$.

Bài 2. Cho hàm số bậc nhất $y = (m-1)x - 2m + 3$

a) Vẽ đồ thị hàm số với $m = 2$;

b) Tìm m để đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = 2x + 3$.

c) Tìm m để đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = 2x + 3$ tại điểm có hoành độ bằng -1.

Bài 3.

3.1 Để tổ chức một trò chơi, cô giáo chuẩn bị một chiếc hộp có 20 chiếc thẻ giống nhau được đánh số từ 1 đến 20. Trong đó những tấm thẻ ghi số chính phương là những tấm thẻ chứa ngôi sao may mắn. Bạn Mai bốc ngẫu nhiên một tấm thẻ. Tính xác suất để Mai bốc được tấm thẻ chứa ngôi sao may mắn.

3.2 Hai người đi xe đạp ngược chiều nhau xuất phát cùng một lúc từ hai địa điểm A và B cách nhau 42km và gặp nhau sau 2 giờ. Tính vận tốc của mỗi người, biết người đi từ A mỗi giờ đi nhanh hơn người đi từ B là 3km.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH. Tia phân giác góc BAC cắt BC tại E. Tia phân giác góc AHB cắt AB tại D.

a) Chứng minh $AB^2 = BH \cdot BC; AC^2 = CH \cdot BC$.

b) Chứng minh $\frac{HB}{HC} = \frac{EB^2}{EC^2}$.

c) Chứng minh tam giác ADE vuông tại D.

d) Đường thẳng qua H song song với CD cắt AC tại M. Đường thẳng qua M song song với AB cắt BC tại N. Chứng minh $AH = NC$.

Bài 5. Cho các số thực phân biệt x, y thỏa mãn $\frac{1}{x^2+4} + \frac{1}{y^2+4} = \frac{2}{xy+4}$ Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{1}{x^2y^2+4} + \frac{4}{xy+4}.$$

ĐỀ LUYỆN SỐ 3

Bài 1. Cho biểu thức $A = \left(\frac{2+x}{2-x} - \frac{2-x}{2+x} - \frac{4x^2}{x^2-4} \right) : \frac{x^2-6x+9}{(2-x)(x-3)}$ với $x \neq \pm 2; x \neq 3$.

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Tìm x để $A = 4$.

Bài 2. Cho hàm số bậc nhất $y = 2x + 4$

a. Vẽ đồ thị hàm số.

b. Tìm m để đồ thị hàm số $y = (m-1)x + m + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = 2x + 4$ tại một điểm thuộc trục tung.

Bài 3.

1. An có một hộp chứa 15 tấm thẻ cùng kích thước được đánh số từ 1 đến 15. An lấy ngẫu nhiên một tấm thẻ trong hộp. Gọi A là biến cố: “ An lấy được tấm thẻ có đánh số là một số nguyên tố”. Tính xác suất của biến cố A.

2. Một xe máy và một ô tô cùng khởi hành từ tỉnh A đến tỉnh B. Xe máy đi với vận tốc 40km/h, ô tô đi với vận tốc 50km/h. Sau khi đi được $\frac{1}{2}$ quãng đường AB, ô tô tăng vận tốc thêm 10km/h trên quãng đường còn lại, do đó nó đến tỉnh B sớm hơn xe máy 36 phút. Tính độ dài quãng đường AB.

Bài 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao BD ($D \in AC$). Kẻ DE vuông góc với BC tại E

- Chứng minh $\triangle BDE \sim \triangle BCD$ từ đó suy ra $BD^2 = BE \cdot BC$;
- Kẻ $DF \perp AB$ tại F. Chứng minh $\widehat{BFE} = \widehat{BCA}$;
- Kẻ CM vuông góc với AB tại M, MD cắt EF tại I. Chứng minh rằng $\triangle IMF$ cân;
- MC cắt EF tại K. Chứng minh rằng MKDF là hình chữ nhật.

Bài 5. Cho hai số nguyên tố p, q lớn hơn 5. Chứng minh rằng $p^4 + 2024q^4$ chia hết cho 15.

ĐỀ LUYỆN SỐ 4

Bài 1. Cho biểu thức $A = \left(\frac{x}{x+1} + \frac{2x-1}{1-x^2} - \frac{x+1}{x-1} \right) : \frac{2x}{x^2-1}$ ($x \neq \pm 1; x \neq 0$)

- Rút gọn biểu thức A.
- Tìm tất cả các số thực x để $A = 7$.

Bài 2. Cho đồ thị hàm số bậc nhất (d): $y = mx + 2m - 1$ ($m \neq 0$)

- Vẽ đường thẳng (d) trên mặt phẳng tọa độ với $m = -1$.
- Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm B(1;2) và song song với đường thẳng $(d_1): y = x + 3$.

Bài 3.

1) Gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất của biến cố

A: “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc bé hơn 3”.

2) Giải bài toán bằng cách lập phương trình:

Một ô tô đi từ Hà Nội đến Đền Hùng với vận tốc trung bình 30km/h. Trên quãng đường Đền Hùng về Hà Nội, vận tốc tăng thêm 10km/h nên thời gian ngắn hơn 36 phút. Tính quãng đường từ Hà Nội đến Đền Hùng.

Bài 4. Cho hình chữ nhật ABCD ($AD < AB$). Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với BD cắt tia BC tại E.

- Chứng minh $\triangle BDE \sim \triangle DCE$.
- Kẻ CH vuông góc với DE tại H. Chứng minh rằng $DC^2 = CH \cdot BD$. Từ đó tính CH biết $AD = 6$ cm và $AB = 8$ cm.

- c) Gọi K là giao điểm của OE và HC. Chứng minh K là trung điểm của HC.
d) Chứng minh ba đường thẳng OE, CD, BH đồng quy.

Bài 5. Tính giá trị biểu thức P sau, biết $abc = 2024$.

$$P = \frac{2bc - 2024}{3c - 2bc + 2024} - \frac{2b}{3 - 2b + ab} + \frac{4048 - 3ac}{3ac - 4048 + 2024a}.$$

ĐỀ LUYỆN SỐ 5

Bài 1. Cho hai biểu thức: $A = \frac{x-1}{2x+1} + \frac{2x+2}{2x-1} - \frac{3}{4x^2-1}$ và $B = \frac{2x-1}{x+1}$ với $x \neq -1; x \neq -\frac{1}{2}; x \neq \frac{1}{2}$.

- a) Tính giá trị của B khi biết $|x+3| = 2$.
b) Rút gọn biểu thức A.
c) Cho $M = AB$. Tìm x nguyên để M nhận giá trị nguyên dương.

Bài 2. Cho hàm số $y = (2m - 1)x - m + 2$

- a) Tìm m để đồ thị hàm số đi qua điểm A (1; -1)
b) Với m tìm được ở câu a, vẽ đồ thị hàm số.

Bài 3.

3.1 Trong hộp có 52 tấm thẻ cùng loại được đánh số khác nhau từ 1 đến 52.

- a) Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp. Tính số kết quả có thể xảy ra.
b) Tính xác suất của các biến cố:

A: “Thẻ rút ra ghi số chẵn” B: “Thẻ rút ra ghi số nhỏ hơn 30” C: “Thẻ rút ra ghi số chia hết cho 3”

3.2 Giải toán bằng cách lập phương trình

Một xe đạp khởi hành từ điểm A, chạy với vận tốc 15 km/h. Sau đó 6 giờ, một xe hơi đuổi theo với vận tốc 60 km/h. Hỏi xe hơi chạy trong bao lâu thì đuổi kịp xe đạp?

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AC > AB$), vẽ đường cao AH.

- 1) Chứng minh rằng $AH^2 = HB \cdot HC$;
- 2) Kẻ AP là phân giác góc HAC (P thuộc CH). Chứng minh tam giác ABP cân và $PH \cdot PB = PC \cdot BH$
- 3) Gọi D là điểm đối xứng A qua H. Qua H kẻ đường thẳng song song với AP cắt CD, CA lần lượt tại E và F. Gọi M là trung điểm EF. Đường thẳng AP cắt CM, CD tại I, N. Chứng minh IHEN là hình bình hành.
- 4) Gọi giao của AH và CM là K. Chứng minh BK vuông góc với MH.

Bài 5. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức $P = (x+1)(y+1)$.

ĐỀ LUYỆN SỐ 6

Bài 1. Cho các biểu thức: $A = \frac{x-3}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1} + \frac{4x+4}{x^3+1}$ và $B = \frac{1}{x+1}$ với $x \neq -1$;

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của biểu thức B khi $|x+2|=1$.

Bài 2. Cho hàm số: $y = f(x) = -2x + 3$.

a) Tính $f(0); f\left(\frac{1}{2}\right)$

b) Vẽ đồ thị của hàm số trên.

Bài 3.

3.1 Trong hộp có 40 viên bi được đánh số khác nhau từ 1 đến 40. Cùng với đó, các viên bi ghi số từ 1 đến 15 sơn màu đỏ; còn lại sơn màu xanh.

a) Lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp. Tính số kết quả có thể xảy ra.

b) Tính xác suất của các biến cố:

A: “Lấy được viên bi màu xanh”

B: “Lấy được viên bi ghi số chẵn”

C: “Lấy được viên bi màu đỏ ghi số lẻ”.

3.2 Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Một người đi ô tô từ A đến B với vận tốc 35 km/h. Lúc từ B về A người đó đi với vận tốc bằng $\frac{6}{5}$ vận tốc lúc đi. Do đó thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút. Tính quãng đường AB.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = 6cm; AC = 8cm. Kẻ đường cao AH.

a) Chứng minh $\triangle ABC$ đồng dạng với $\triangle HBA$.

b) Tính độ dài các cạnh BC, AH.

c) Phân giác của góc ACB cắt AH tại E, cắt AB tại D. Tính tỉ số diện tích của hai tam giác ACD và HCE.

d) Vẽ HM, HN lần lượt vuông góc với AC, AB. Chứng minh: $AH^3 = BC \cdot HM \cdot HN$.

Bài 5. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{27-12x}{x^2+9}$.

HẾT