

Phần I – LÝ THUYẾT**1. TỈ LỆ THỨC VÀ ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ**

- Tỉ lệ thức; tính chất của dãy tỉ số bằng nhau
- Đại lượng tỉ lệ thuận, đại lượng tỉ lệ nghịch

2. BIỂU THỨC ĐẠI SỐ VÀ ĐA THỨC MỘT BIẾN

- Các phép cộng, trừ, nhân, chia đa thức một biến
- Nghiệm của đa thức một biến

3. MỘT SỐ HÌNH KHỐI TRONG THỰC TIỄN

- Hình hộp chữ nhật và lập phương
- Hình lăng trụ đứng tam giác và lăng trụ đứng tứ giác

4. QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG MỘT TAM GIÁC

- Quan hệ giữa cạnh và góc đối diện trong một tam giác
- Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên
- Quan hệ giữa ba cạnh trong tam giác
- Sự đồng quy của ba đường trung tuyến, ba đường phân giác, ba đường cao, ba đường trung trực trong một tam giác.

Phần II – BÀI TẬP**I. ĐẠI SỐ****Bài 1.** Cho hai đa thức

$$P(x) = 2x^2 - 3x^3 + x^2 + 3x^3 - x - 1 - 3x \text{ và } Q(x) = -3x^2 + 2x^3 - x - 2x^3 - 3x - 2$$

- Thu gọn và sắp xếp hai đa thức $P(x)$, $Q(x)$ theo lũy thừa giảm dần của biến.
- Tính $F(x) = Q(x) - 3x \cdot P(x)$ và $G(x) = P(x) - Q(x)$
- Tính $F(-2)$, $Q(3)$.
- Tính $G(x) \cdot (6x^2 - 1)$.

Bài 2. Cho hai đa thức

$$A(x) = 10x^2 - 3x^3 + 6x - 6x^2 + 8x^2 - 2x^3 \text{ và } B(x) = 3x(x + 1) - 2(4 - x^2)$$

- Thu gọn và sắp xếp hai đa thức $A(x)$, $B(x)$ theo lũy thừa giảm dần của biến.
- Tìm bậc, hệ số tự do và hệ số cao nhất của $A(x)$
- Tính $A(1) + B(-1)$.
- Tìm nghiệm của đa thức $B(x)$.

Bài 3. Cho 2 đa thức:

$$M(x) = 2x^4 - 3x^3 - x + 7x^3 - 5x + 1; N(x) = -2x^3 - 2x^2 + 3x^4 + 5x - 2x^4 - 6 + x + 3x^2$$

- Thu gọn và sắp xếp các đa thức trên theo lũy thừa giảm dần của biến.
- Tìm đa thức $Q(x)$ biết: $Q(x) = M(x) - 2N(x)$.
- Tìm x để $Q(x) = 8x^3 - 14x + 15$.
- Tìm đa thức $B(x)$ biết: $B(x) - x \cdot N(x) = M(x)$.
- Tìm dư khi chia $B(x)$ cho $(x^2 - x + 1)$.

Bài 4. Cho đa thức: $C(x) = 5x^2 + 3x^4 - 3x^2 - x - x^4 - 12x^3 + 16x^2 + 3$

- Tìm đa thức $D(x)$ biết: $(x - 3) \cdot D(x) = C(x)$.
- Xác định bậc, hệ số cao nhất, hệ số tự do của đa thức $D(x)$

- c) Tính $D(-0,5)$.
 d) Tìm đa thức $E(x) = C(x) - (1-x)D(x)$.

Bài 5. Cho đa thức: $P(x) = -2 - 2x^4 - x - 5x^3 + 10x - 17x^2 + \frac{1}{2}x^3 - 5 + x^3$.

- a) Thu gọn đa thức trên rồi sắp xếp theo lũy thừa giảm dần của biến.
 b) Xác định bậc, hệ số cao nhất, hệ số tự do của đa thức $P(x)$. Tính $P(-2)$.
 c) Tìm đa thức $Q(x)$ sao cho $Q(x) - P(x) = 2x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 19x - 1$.
 d) Tìm đa thức dư trong phép chia $P(x) : (2-x)$.
 e) Tìm nghiệm đa thức $A(x) = Q(x) + (8 + 31x)$.

Bài 6. Thu gọn các đa thức sau

$$A = 5 - 4x(x-2) + 4x^2$$

$$B = x(2x^2 - 3) - x^2(5x + 1) + x^2$$

$$C = 2x(3x^3 - x) - 4x^2(x - x^2 + 1) + (x - 3x^2)x$$

$$D = 4x(x^2 - x + 3) - (x - 6)(x - 5)$$

Bài 7. Thực hiện phép chia sau

$$a) (x^3 - x^2 - 7x + 3) : (x - 3)$$

$$b) (2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2) : (x^2 - 2)$$

$$c) (3x^4 + x^3 + 6x - 5) : (x^2 + 1)$$

$$d) (2x^4 - x^3 + 2x - 1) : (x^2 - x + 1)$$

Bài 8. Cho hai đa thức $P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + a$ và $Q(x) = x - 2$. Xác định hệ số a sao cho với mọi giá trị của x thì $P(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x)$.

Bài 9. Tìm các hệ số a, b sao cho đa thức $x^3 + ax + b$ chia hết cho đa thức $x - 2$ và chia cho đa thức $x + 1$ còn dư -9 .

Bài 10. Ba lớp 7A, 7B, 7C được giao nhiệm vụ trồng 120 cây để phủ xanh đồi trọc. Tính số cây trồng được của mỗi lớp, biết số cây trồng được của ba lớp 7A, 7B, 7C tỉ lệ với 7, 8, 9.

Bài 11. Số học sinh của ba lớp 7A, 7B, 7C tương ứng tỉ lệ với 21; 20; 22. Tính số học sinh của mỗi, biết rằng lớp 7C có nhiều hơn lớp 7A là 2 học sinh.

Bài 12. Một khu đất hình chữ nhật có chiều dài và chiều rộng tỉ lệ với 8 và 5. Diện tích khu đất đó bằng $360m^2$. Tính chiều dài và chiều rộng của khu đất.

Bài 13. Ba xưởng may cần hoàn thành 720 bộ quần áo trong một khoảng thời gian nhất định. Xưởng A có 12 công nhân, xưởng B có 13 công nhân, xưởng C có 11 công nhân. Tính số bộ quần áo mỗi xưởng phải may biết mỗi công nhân đều may số bộ quần áo như nhau.

Bài 14. Cho biết 30 người thợ xây xong một ngôi nhà hết 90 ngày. Hỏi 15 người thợ xây ngôi nhà đó hết bao nhiêu ngày? (Giả sử năng suất làm việc của mỗi người thợ là như nhau).

Bài 15. Ba lớp 7A, 7B, 7C được phân công lao động với khối lượng công việc như nhau. Lớp 7A, 7B, 7C lần lượt hoàn thành công việc trong 3 giờ, 4 giờ, 5 giờ. Tính số học sinh của mỗi lớp, biết rằng tổng số học sinh của ba lớp là 94 học sinh. (Giả sử năng suất lao động của mỗi học sinh là như nhau.)

Bài 16. Một xe ô tô chạy từ A đến B gồm ba chặng đường bằng nhau. Vận tốc trên mỗi chặng lần lượt là 72 km/h, 60 km/h, 40 km/h. Biết tổng thời gian xe chạy từ A đến B hết 4 giờ. Tính thời gian ô tô chạy trên từng chặng và tính quãng đường AB.

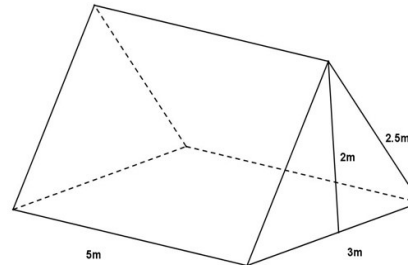
Bài 17. Ba đội máy cày làm việc trên 3 cánh đồng có diện tích bằng nhau. Đội I hoàn thành công việc trong 4 ngày, đội II trong 6 ngày, đội III trong 5 ngày. Biết rằng đội III có ít hơn đội I ba máy. Hỏi mỗi đội có bao nhiêu máy? (Giả thiết năng suất mỗi máy như nhau và mỗi ngày làm cùng một thời gian).

II. HÌNH HỌC

Bài 18. Một hộp sữa hình hộp chữ nhật có kích thước như sau chiều dài là 10cm, chiều rộng là 5cm và chiều cao là 22cm có ghi thể tích thực là 1 lít.

- Tính chiều cao của lượng sữa trong hộp sữa đó.
- Trong quá trình làm chiếc hộp, dự tính hao hụt khoảng 10% nguyên liệu. Tính diện tích bìa cứng thực tế để làm chiếc hộp đó.

Bài 19. Một cái lều ở trại hè có dạng lăng trụ đứng tam giác có kích thước như hình vẽ



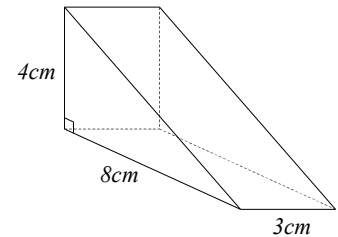
- Tính thể tích khoảng không ở bên trong
- Tính diện tích vải bạt cần có để dựng lều đó là bao nhiêu? (không tính các mép và nếp gấp của lều)

Bài 20. Một căn phòng rộng 4m, dài 6m, cao 2,5m. Người ta muốn quét vôi trần nhà và bốn bức tường. Biết tổng diện tích các cửa bằng 12% tổng diện tích 4 bức tường và trần nhà.

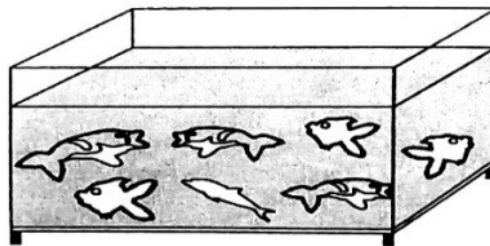
- Tính diện tích cần quét vôi.
- Biết chi phí mỗi m^2 quét vôi là 50 000 đồng. Tính số tiền phải trả để quét vôi căn phòng đó.

Bài 21. Một chiếc bánh ngọt có dạng hình lăng trụ đứng tam giác kích thước như hình vẽ.

- Tính thể tích chiếc bánh.
- Nếu phải làm một chiếc hộp hình hộp chữ nhật bằng giấy cứng có chiều dài 9cm, rộng 4cm và cao 6cm để đựng chiếc bánh thì cần dùng bao nhiêu cm^2 giấy cứng (coi mép dán không đáng kể).



Bài 22. Một bể cá dạng hình hộp chữ nhật làm bằng kính (không có nắp) có chiều dài 80cm, chiều rộng 50cm, chiều cao 45cm. Mực nước ban đầu trong bể cao 35cm.



- Tính diện tích kính dùng để làm bể cá đó.
- Người ta cho vào bể một hòn đá có thể tích $10dm^3$. Hỏi mực nước trong bể lúc này cao bao nhiêu?

Bài 23. Một bể bơi có chiều dài 12m, chiều rộng 5m và sâu 2,75m.

- Hỏi người thợ phải dùng bao nhiêu viên gạch men hình chữ nhật để lát đáy và xung quanh thành của bể đó? Biết rằng diện tích mạch vữa ko đáng kể và mỗi viên gạch men có chiều dài 25cm, chiều rộng 20cm.

- b) Lúc đầu mức nước trong bể có chiều cao 1m. Người ta mở hai chiếc vòi nước có công suất chảy như nhau chảy vào bể, mỗi giờ chảy được 500l. Hỏi sau thời gian bao lâu thì bể đầy nước?

Bài 24. Cho $\triangle ABC$. Gọi M là trung điểm của BC. Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$.

- a) Chứng minh $\triangle ABM = \triangle DCM$.
 b) Chứng minh $AB \parallel CD$.
 c) Chứng minh $AM < \frac{AB + AC}{2}$.

d) Gọi T, P lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng M là trung điểm của TP.

Bài 25. Cho tam giác ABC cân tại A có CP và BQ là các đường phân giác trong của tam giác ABC ($P \in AB, Q \in AC$). Gọi O là giao điểm của CP và BQ. Chứng minh rằng:

- a) Tam giác OBC là tam giác cân
 b) Đường thẳng AO vuông góc với BC
 c) $CP = BQ$
 d) $\triangle APQ$ là tam giác gì? Vì sao?

Bài 26. Cho tam giác ABC. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, AC. Trên tia đối của tia FB lấy điểm P sao cho $PF = BF$. Trên tia đối của tia EC lấy điểm Q sao cho $QE = CE$.

- a) Chứng minh: $\triangle AQE = \triangle BCE$, $\triangle APF = \triangle CBF$, từ đó suy ra $AP = AQ$.
 b) Chứng minh ba điểm P, A, Q thẳng hàng
 c) Chứng minh $BQ \parallel AC$ và $CP \parallel AB$.
 d) Gọi R là giao điểm của hai đường thẳng PC và QB. Chứng minh rằng AR, BP, CQ đồng quy.

Bài 27. Cho tam giác ABC vuông ở B, có $\hat{A} = 60^\circ$. Phân giác $\widehat{BAC}$ cắt BC ở D. Kẻ $DH \perp AC$ ($H \in AC$)

- a) Chứng minh $DB = DH$; $AD \perp BH$
 b) $HA = HC$
 c) $DC > AB$
 d) Gọi S là giao điểm của HD và AB. Gọi E là trung điểm của CS. Chứng minh A, D, E thẳng hàng

Bài 28. Cho $\triangle EMN$ cân tại E ($\hat{E} < 90^\circ$), các đường cao MA, NB cắt nhau tại I. Tia EI cắt MN tại H.

- a) Chứng minh: $\triangle AMN = \triangle BNM$.
 b) Chứng minh EH là đường trung tuyến của $\triangle EMN$.
 c) Chứng minh I cách đều 3 cạnh của $\triangle ABH$.
 d) Tìm điều kiện của tam giác MEN để I là trọng tâm của tam giác ABH.

Bài 29. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, trung tuyến AM

- a) Chứng minh $\triangle AMB = \triangle AMC$
 b) Chứng minh $\triangle AMB$ vuông cân
 c) Lấy điểm D và E sao cho A là trung điểm DC và B là trung điểm AE. Chứng minh $MD = ME$
 d) Gọi K là giao điểm của EM và AC; H là giao điểm DM và AE. Chứng minh KH vuông góc với DE.

Bài 30. Cho tam giác ABC nhọn, có $\hat{A} = 60^\circ$ và $AB < AC$. Hai điểm D và E lần lượt là trung điểm của AB và AC. Trung trực của đoạn thẳng AB, AC cắt nhau tại O và cắt đường thẳng BC lần lượt tại M, N.

- a) Chứng minh: $\triangle ODA = \triangle ODB$
 b) Chứng minh: $\triangle NOA = \triangle NOC$
 c) Chứng minh: AO là phân giác góc NAM
 d) Tính số đo góc NAM.

Bài 31. Cho $\triangle ABC$ nhọn, đường cao AH. Gọi D và E là hình chiếu vuông góc của H trên AB, AC. Lấy điểm P sao cho D là trung điểm PH; lấy điểm Q sao cho E là trung điểm HQ.

- a) Chứng minh $AP = AQ$
 b) Chứng minh $\widehat{PAQ} = 2\widehat{BAC}$
 c) Gọi I, K là giao điểm của PQ với AB, AC. Chứng minh HA là tia phân giác $\widehat{IHK}$
 d) CI cắt AH tại O. Chứng minh B, O, K thẳng hàng.

Bài 32. Cho $\triangle ABC$ cân tại A, và điểm M là trung điểm cạnh BC. Vẽ tia $Ax \parallel BC$; $Cy \parallel AB$ sao cho Ax cắt Cy tại D. Kéo dài AM cắt tia đối của tia Cy tại điểm E. Chứng minh rằng:

- $\triangle ACB = \triangle CAD$; $AB = DC$
- $\triangle MBA = \triangle MCE$; $MA = ME$ và $EC = CD$
- Trên tia Ax lấy N sao cho $AN = BM$ và G là giao điểm của AC và MD. Chứng minh E, G, N thẳng hàng.
- Gọi P là trọng tâm tam giác ABC, chứng minh: $NG > AP$

Bài 33. Cho tam giác ABC nhọn, $AB > AC$, các đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm BC. Trên tia đối của các tia AM và AC lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho $AP = AM$, $AQ = AC$.

- Chứng minh: $\triangle ACM = \triangle AQP$
- Chứng minh: $AH \perp PQ$
- Chứng minh $BQ = 2AM$.
- Gọi N là giao điểm của QM và AB. J là trung điểm của BM. Chứng minh P, N, J thẳng hàng.

Bài 34. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AC > AB$. Kẻ $AH \perp BC$. Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HB$. Kẻ $CE \perp AD$ kéo dài.

- Chứng minh $\triangle AHB = \triangle AHD$
- Chứng minh $\widehat{BAH} = \widehat{ACB}$.
- Chứng minh CB là tia phân giác của góc ACE
- Gọi giao điểm của AH và CE là K. Chứng minh $KD \parallel AB$.
- So sánh AC và CD.

Bài 35. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$, kẻ DH và EK lần lượt vuông góc với các tia AB và AC.

- Tam giác DEA là tam giác gì? Vì sao?
- Chứng minh rằng $\triangle ADH = \triangle AEK$.
- Gọi O là giao điểm của DH và EK. Chứng minh rằng tam giác DOE cân.
- Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng A, I, O thẳng hàng.

Bài 36. Cho tam giác ABC vuông tại C có $\hat{A} = 60^\circ$. Tia phân giác của BAC cắt BC tại E. Kẻ $EK \perp AB$, K thuộc AB. Kẻ BD vuông góc với tia AE (D thuộc AE). Lấy điểm M sao cho C là trung điểm của AM. Chứng minh:

- $AC = AK$ và $AE \perp CK$
- $KA = KB$
- $EB > AC$.
- Ba đường thẳng AC, BD, KE cùng đi qua một điểm.
K, E, M thẳng hàng.

Bài 37. Cho tam giác ABC có $AB < AC$, hai đường cao AD và BE cắt nhau tại H và có $AD = BE$.

- So sánh $\widehat{BAD}$ và $\widehat{CAD}$
- Tam giác ABC là tam giác gì? Vì sao?
- Chứng minh rằng đường thẳng CH là trung trực của AB.
- Chứng minh $DE \parallel BA$.
- Gọi O là trung điểm của CH, chứng minh $OD = OE$.

Bài 38. Cho tam giác ABC cân tại A, trung tuyến AM. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$.

- Chứng minh tam giác AED cân tại A.
- Chứng minh AM là tia phân giác của góc DAE.
- Từ B và C hạ BH, CK theo thứ tự vuông góc với AD và AE (H thuộc AD, K thuộc AE). Chứng minh rằng $\triangle AHB = \triangle AKC$.

- d) Chứng minh rằng $HK \parallel DE$.
- e) Gọi I là giao điểm của HB và AM . Chứng minh rằng $AB \perp ID$.
- f) Chứng minh rằng HB, AM, CK cùng đi qua một điểm.

Bài 39. Cho tam giác ABC nhọn, đường cao AH . Vẽ điểm D sao cho AB là trung trực của HD . Lấy điểm E sao cho AC là trung trực của HE , gọi M là giao điểm của DE với AB , N là giao điểm của DE với AC . Chứng minh rằng:

- a) Tam giác ADE cân;
- b) HA là tia phân giác của góc MHN .
- c) $BN \perp AC$
- d) AH, BN, CM đồng quy

III. NÂNG CAO

Bài 40. Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số nguyên. Biết $f(-1), f(0), f(1)$ đều chia hết cho 3, chứng minh rằng $f(x)$ chia hết cho 3 với mọi giá trị nguyên của x .

Bài 41. Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$. Biết $f(-1), f(0), f(1)$ đều nhận giá trị là các số nguyên, chứng minh rằng $f(x)$ nhận giá trị là số nguyên với mọi giá trị nguyên của x .

Bài 42. Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn với mọi giá trị của x ta đều có $x.f(x+1) = (x+2).f(x)$. Chứng minh rằng $f(x)$ có ít nhất hai nghiệm.

Bài 43. Cho đa thức $f(x) = (x+2)^2(x^4 - x^3 - 4x^2 + 3)$. Tính hệ số tự do và tổng các hệ số của các hạng tử bậc chẵn của $f(x)$.

Bài 44. Cho đa thức: $f(x) = ax^2 + bx + c$, xác định các hệ số a, b, c biết:

- a) $f(0) = 2; f(1) = 7; f(-2) = -14$
- b) $f(-2) = 0, f(2) = 0$ và a lớn hơn c là năm đơn vị.

Bài 45. Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$. Biết $f(-1) = 2023, f(0) = 2024, f(1) = 2025$. Tính $f(2026)$?

Bài 46. Cho $f(x) = ax^3 + 4x(x^2 - 1) + 8$ và $g(x) = x^3 + 4x(bx - 1) + c - 3$, trong đó a, b, c là các hằng số. Xác định a, b, c để $f(x) = g(x)$.

Bài 47. Cho đa thức bậc hai: $P(x) = ax^2 + bx + c$, biết rằng $P(x)$ thỏa mãn cả hai điều kiện sau: $P(0) = -2; 4P(x) - P(2x-1) = 6x - 6$. Chứng minh rằng $a + b + c = 0$ và xác định đa thức $P(x)$

Bài 48. Cho đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên. Biết $P(1), P(2), P(3), \dots, P(2023)$ chia hết cho 2023. Chứng minh rằng $P(x)$ chia hết cho 2023 với mọi giá trị nguyên của x .

Bài 49. Cho đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên thỏa mãn $P(0) = P(1) = 2$. Chứng minh $P(7)$ không thể là số chính phương.

Bài 50. Cho $P(x) = ax^2 + bx + c$. Biết rằng $5a + b + 2c = 0$. Chứng minh $P(2).P(-1) \leq 0$

Phần III – MỘT SỐ ĐỀ LUYỆN

Đề 1

Bài 1. Cho đa thức: $M(x) = 2x^4 + 2x^3 - 5x - 10 + 3x^2 + 2x^3$ và $N(x) = 4x^4 - 7 + 4x^3 - x(2x^3 + 5) + 9$

- a) Thu gọn đa thức $M(x); N(x)$ và sắp xếp các hạng tử của mỗi đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến.
- b) Tìm bậc, hệ số cao nhất, hệ số tự do của đa thức $M(x)$.
- c) Tính $M(x) + N(x)$.

d) Tính $Q(x) = M(x) - N(x)$.

e) Tìm nghiệm của đa thức $Q(x)$.

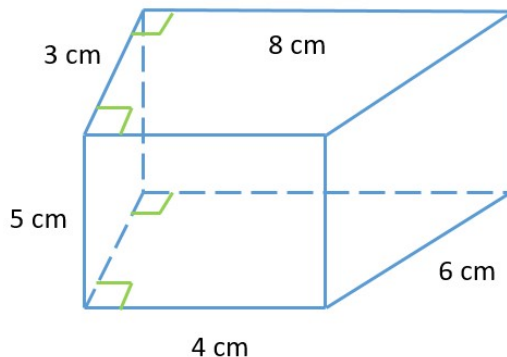
f) Tìm thương và dư trong phép chia $M(x)$ cho $(x^2 - 2x + 1)$.

Bài 2. Cuối năm, lớp 7A có 39 học sinh được xếp loại học lực gồm 3 loại Tốt, Khá, Đạt. Nếu loại Tốt bớt đi 3 học sinh, loại Khá thêm 1 học sinh, loại Đạt thêm 2 học sinh thì số học sinh loại Tốt, Khá, Đạt tỉ lệ nghịch với 4, 3, 2. Tính số học sinh ở mỗi loại của lớp 7A.

Bài 3. Một chi tiết gỗ đồ chơi có kích thước như hình bên. Người ta muốn sơn xung quanh màu xanh và hai mặt đáy màu đỏ.

a) Tính diện tích cần sơn màu xanh.

b) Tính thể tích của khối gỗ đó.



Bài 4. Cho tam giác ABC cân tại A và $\hat{A} < 90^\circ$, CD là tia phân giác của góc ACB (D thuộc AB). Từ D kẻ $DE \perp AC$ tại E, $DF \perp BC$ tại F. Đường thẳng DE cắt BC tại K, đường thẳng DF cắt AC tại H.

a) Chứng minh $\triangle ECD = \triangle FCD$.

b) Chứng minh $\triangle ECK = \triangle FCH$.

c) Gọi M là trung điểm của HK. Chứng minh ba điểm C, D, M thẳng hàng.

d) Đường thẳng qua A vuông góc với HD cắt CM tại I. Chứng minh tam giác IKD cân.

Bài 5. Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các hằng số. Biết $f(0); f(1); f(-1); f\left(-\frac{1}{2}\right)$ là các số nguyên. Chứng minh rằng a, b, c là các số nguyên.

ĐỀ 2

Bài 1. Cho hai đa thức: $P(x) = 4x^4 - 2x + 5 - 3x^3 - x + 1 - x^3$

$$/ \quad Q(x) = 6 - 2x + x^4 - 2x^2 + 3x + 2x^2$$

a) Thu gọn hai đa thức và sắp xếp theo lũy thừa giảm dần của biến.

b) Tìm các đa thức $A(x) = P(x) + Q(x)$ và $B(x) = P(x) - Q(x)$.

c) Tìm nghiệm của các đa thức $C(x) = Q(x) - (x^4 - 3x + 2)$.

d) Chứng minh rằng đa thức $Q(x) - x$ luôn dương với mọi x .

Bài 2. Một ô tô đi từ A đến B gồm ba đoạn thẳng dài bằng nhau với vận tốc trên mỗi đoạn lần lượt là 54km/h, 45km/h, 30km/h. Biết tổng thời gian đi của chặng thứ 3 và chặng thứ nhất hơn chặng thứ hai là 4 giờ, Tính quãng đường AB.

Bài 3. Một bể cá dạng hình hộp chữ nhật làm bằng kính (không có nắp) có chiều dài 90 cm, chiều rộng 60 cm và chiều cao 50 cm. Mực nước ban đầu trong bể cao 45 cm.

a) Tính diện tích kính làm bể cá đó.

b) Người ta thả vào bể cá một hòn non bộ có thể tích là $16,8 \text{ dm}^3$. Hỏi mực nước trong bể lúc này cao bao nhiêu xăng – ti – mét? (Hòn non bộ ngập hoàn toàn trong nước và coi sự thấm nước là không đáng kể)



Bài 4. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC.

- Chứng minh rằng $AN = AM$ và $\triangle ABN = \triangle ACM$.
- Gọi I là giao điểm của BN và CM. Chứng minh tam giác IBC cân.
- Chứng minh AI là đường trung trực của đoạn MN.
- Gọi E, F lần lượt là các điểm thuộc tia đối của tia BA, CA sao cho $BM = BE; CN = CF$. Gọi D là điểm thuộc tia FA sao cho A là trung điểm của DF. Gọi H là giao điểm của tia AI và EF. Chứng minh ba điểm D, M, H thẳng hàng.

Bài 5: Cho đa thức $F(x) = ax^3 + 2bx^2 + 3cx + 4d$ với các hệ số a, b, c, d là các số nguyên. Chứng minh rằng không thể đồng thời tồn tại $F(7) = 73$ và $F(3) = 58$.

Đề 3

Bài 1. Cho hai đa thức:

$$M(x) = -5x^4 + 3x^5 + x(x^2 + 5) + 14x^4 - 6x^5 - x^3 + x - 1$$

$$N(x) = x^4(x - 5) - 3x^3 + 3x + 2x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 5$$

- Thu gọn và sắp xếp hai đa thức trên theo lũy thừa giảm dần của biến.
- Tính $H(x) = M(x) + N(x); G(x) = M(x) - N(x)$. Tìm hệ số cao nhất và hệ số tự do của $H(x)$ và $G(x)$.
- Chứng tỏ $x = -1$ không là nghiệm của đa thức $G(x)$.
- Tìm nghiệm của đa thức $H(x)$.
- Tìm đa thức thương và dư trong phép chia đa thức $G(x)$ cho đa thức $(x^2 - x + 1)$.

Bài 2. Ba nhóm thợ thực hiện xây các công trình giống nhau. Nhóm thứ nhất xây xong trong 40 ngày, nhóm thứ hai xây xong trong 60 ngày và nhóm thứ ba xây xong trong 50 ngày. Biết nhóm thứ ba có ít hơn nhóm thứ nhất là 3 người thợ. Tính số thợ của mỗi nhóm (năng suất các người thợ như nhau).

Bài 3. Một chiếc gàu xúc của một xe xúc có dạng gần như một hình lăng trụ đứng tam giác, biết diện tích đáy là $1,5m^2$, chiều cao là $3,2m$. Hỏi để xúc hết $90m^3$ cát, chiếc xe phải xúc ít nhất bao nhiêu gàu?

Bài 4. Cho tam giác đều DEF. Tia phân giác của góc E cắt cạnh DF tại M. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với DE, đường thẳng này cắt tia EM tại N và cắt tia EF tại P.

- Chứng minh rằng: $\triangle DNF$ cân
- Chứng minh rằng: NF vuông góc với EF
- Chứng minh rằng: $\triangle NEP$ cân
- Gọi Q là trung điểm của NF. Qua Q kẻ đường thẳng d song song với EP, d cắt NE tại M. Chứng minh rằng: M cách đều ba đỉnh của $\triangle DNF$.

Bài 5. Cho a, b, c là ba số có $a + b + c \neq 0$ và thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}. \text{ Hãy tính giá trị của biểu thức } B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right).$$

Đề 4

Bài 1. Cho hai đa thức: $M(x) = 2x + x^4 - 4x^3 - x^2 - 2x^4 + 4x^3 - 5$

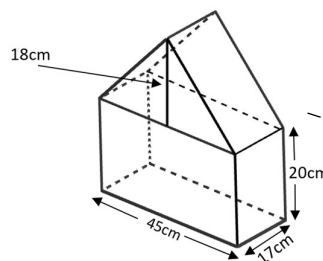
$$N(x) = -4x^3 - 2x + \frac{1}{2}x^2 + 4x^3 + 4x - \frac{1}{2}x^2 + 3$$

- Thu gọn và sắp xếp đa thức $M(x)$, $N(x)$ trên theo lũy thừa giảm dần của biến.
- Xác định bậc, hệ số tự do và hệ số cao nhất của đa thức $M(x)$, $N(x)$.
- Tìm nghiệm của đa thức $N(x)$.
- Tìm đa thức $B(x)$ biết $B(x) + M(x) = N(x)$. Chứng minh đa thức $B(x)$ vô nghiệm.
- Tìm đa thức $G(x) = M(x) - N(x) \cdot (x - 2) - (-x^4 + x + 1)$. Tính giá trị của $G(-1)$.
- Tìm hệ số của a để đa thức $4x^4 - 6x^2 + a$ chia hết cho $G(x)$.

Bài 2. Ba nhóm học sinh của khối 7 của trường Archimedes thực hiện dự án nhà nổi trong hoạt động Science Fair (có cùng kích thước). Nhóm thứ nhất hoàn thành trong 4 ngày, nhóm thứ hai hoàn thành trong 6 ngày và nhóm thứ ba hoàn thành trong 9 ngày. Biết nhóm thứ hai có ít hơn nhóm thứ nhất là ba người, tính số học sinh của mỗi nhóm (giả sử năng suất các học sinh như nhau).

Bài 3. Mô hình một ngôi nhà có kích thước như hình vẽ.

- Tính thể tích của mô hình ngôi nhà.
- Người ta muốn sơn tất cả các mặt của mô hình này (trừ mặt tiếp xúc giữa hai hình). Tính diện tích cần sơn.



Bài 4. Cho $\triangle ABC$ ($AB < AC$) có AD là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ ($D \in BC$). Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $AM = AB$.

- Chứng minh: $\triangle ABD = \triangle AMD$;
- Gọi I là giao điểm của AD và BM . Chứng minh: I là trung điểm của BM và $AI \perp BM$;
- Gọi K là trung điểm AM . Trên tia đối của tia KB lấy điểm P sao cho $KB = KP$. Chứng minh $MP \parallel AB$;
- Trên tia đối của tia MP lấy điểm E sao cho $MP = ME$. Chứng minh ba điểm A, I, E thẳng hàng.

Bài 5. Tìm đa thức bậc hai $f(x)$ sao cho $f(x) - f(x-1) = x$. Áp dụng để tính tổng $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

Đề 5

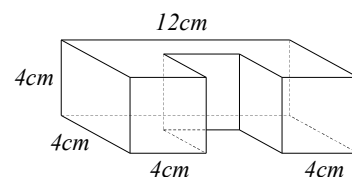
Câu 1. Cho các đa thức $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3x + 12 + 2x^2 - x^3 - x$

$$g(x) = 3x^3 + 7x^2 - x + 4 - 4x^2 + 5x.$$

- Thu gọn đa thức trên rồi sắp xếp hai đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến.
- Xác định bậc, hệ số cao nhất, hệ số tự do của mỗi đa thức
- Tính $f(1)$, $g(-2)$
- Chứng minh rằng đa thức $g(x)$ chia hết cho $x + 1$
- Tìm đa thức $M(x)$, biết $2f(x) - M(x) = g(x)$.
- Tìm nghiệm của đa thức $C(x)$ biết $C(x) = g(x) - f(x)$.

Câu 2. Bốn đội máy cày làm việc trên bốn cánh đồng có diện tích bằng nhau. Đội thứ nhất hoàn thành công việc trong 4 ngày, đội thứ hai trong 5 ngày, đội thứ ba trong 6 ngày và đội thứ tư trong 10 ngày. Hỏi cả bốn đội có tất cả bao nhiêu cái máy cày, biết công suất mỗi máy cày là như nhau và đội thứ nhất có nhiều hơn đội thứ tư là 18 máy?

Câu 3. Một hình hộp chữ nhật có kích thước như hình và bị khuyết mất một phần, phần khuyết này là một hình hộp chữ nhật có diện tích đáy là 8cm^2 .



- Tính thể tích của hình hộp chữ nhật bị khuyết này.
- Tính diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật bị khuyết này.

Câu 4. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{BAC} > 90^\circ$. Tia phân giác góc BAC cắt cạnh BC tại điểm D. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của D lên các cạnh AB, AC.

- Chứng minh rằng $\triangle ADE = \triangle ADF$, từ đó suy ra $\triangle AEF$ cân tại A.
- Trên tia EA lấy điểm M sao cho $EM = CF$. Qua M kẻ đường thẳng song song với AC, cắt đường thẳng EF tại N. Chứng minh rằng $\triangle MEN$ cân, từ đó suy ra $MN = CF$.
- Chứng minh rằng tam giác CDM cân tại D.
- Đường thẳng EN cắt CM tại I. Gọi H là giao điểm của DI và AC. Gọi K là giao điểm của đường thẳng DF và CM. Chứng minh rằng I là trung điểm CM và $KH \perp BC$.

Câu 5. Tìm các số a, b thỏa mãn đa thức $x^3 - ax^2 + 2x + b$ chia hết cho đa thức $x^2 - x - 2$.

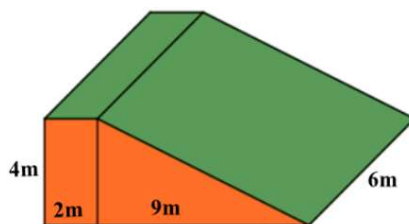
Đề 6

Câu 1. Cho đa thức: $P(x) = -2 - 2x^4 - x - 5x^3 + 10x - 17x^2 + \frac{1}{2}x^3 - 5 + x^3$.

- Thu gọn đa thức trên rồi sắp xếp theo lũy thừa giảm dần của biến.
- Xác định bậc, hệ số cao nhất, hệ số tự do của đa thức P(x). Tính $P(-2)$.
- Tìm đa thức Q(x) sao cho $Q(x) - P(x) = 2x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 19x - 1$.
- Tìm đa thức dư trong phép chia $P(x) : (2 - x)$.
- Tìm nghiệm đa thức $A(x) = Q(x) + (8 + 31x)$.

Câu 2. Trong quý 3 năm 2024, tại một siêu thị điện máy, người ta thấy số lượng ti vi bán ra của bốn nhân viên Nam, Khánh, Châu và Dũng như sau: Số lượng Ti vi Dũng bán được gấp 7 lần Nam, gấp Khánh 5 lần, gấp Châu 4 lần. Tổng cộng 4 người bán được 669 chiếc Ti vi. Hỏi số Ti vi mà Dũng bán được là bao nhiêu?

Câu 3. Để làm một thềm dốc thuận tiện cho dắt xe, người ta đúc một khối bê tông có kích thước như hình bên dưới.



- Tính diện tích toàn phần của thềm dốc đó.
- Tính chi phí để đúc khối bê tông đó, biết rằng chi phí để đúc 1m^3 bê tông là 1,5 triệu đồng.

Câu 4. Cho tam giác ABC cân tại A, trung tuyến AM. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$.

- Chứng minh tam giác AED cân tại A. Chứng minh AM là tia phân giác của góc DAE.
- Từ B và C hạ BH, CK theo thứ tự vuông góc với AD và AE (H thuộc AD, K thuộc AE). Chứng minh rằng $\triangle AHB = \triangle AKC$.
- Chứng minh rằng $HK \parallel DE$.
- Gọi I là giao điểm của HB và AM. Chứng minh rằng $AB \perp ID$.

Câu 5. Tìm tất cả các nghiệm của đa thức $A(x) = x^2 - (3 + 2b)x + b^2$ biết rằng đa thức $A(x)$ nhận $x = 1$ là nghiệm.

Đề 7.

Bài 1. Cho hai đa thức: $A(x) = 2x(x^2 - 2) - x^3 + 3x^2 + 1$ và $B(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x + 6$.

- Thu gọn và sắp xếp đa thức $A(x)$ theo lũy thừa giảm dần của biến.
- Tìm bậc, hệ số cao nhất và hệ số tự do của đa thức $A(x)$.
- Kiểm tra xem $x = -2$ có phải là nghiệm của đa thức $A(x)$ hay không? Vì sao?
- Tìm đa thức $H(x)$ thỏa mãn $H(x) = A(x) + B(x)$. Chứng minh rằng đa thức $H(x)$ luôn nhận giá trị dương với mọi giá trị của x .
- Tìm đa thức $G(x)$ sao cho $G(x) + (x - 1)(2x^2 + 2x - 1) = B(x)$.
- Thực hiện phép chia đa thức $A(x)$ cho đa thức $(x^2 + 1)$.

Bài 2. Lớp 7A mở gian hàng tại Hội chợ Xuân với 3 mặt hàng chính. Sau khi trừ chi phí nguyên liệu, số tiền lãi trên mỗi sản phẩm thu được như sau:

- Mỗi cây Kẹo bông lãi 3.000 đồng.
- Mỗi suất Bánh tráng lãi 4.000 đồng.
- Mỗi ly Trà sữa lãi 6.000 đồng.

Cuối ngày, lớp trưởng tổng kết thấy rằng tổng số tiền lãi thu được từ mỗi loại mặt hàng là bằng nhau và cả ngày lớp đã bán được tổng cộng 180 sản phẩm.

- Tính số lượng mỗi loại sản phẩm lớp đã bán.
- Tổng số tiền lãi mà gian hàng thu được là bao nhiêu?

Bài 3. Phần bên trong của một cái khuôn làm bánh bằng kim loại có dạng hình hộp chữ nhật với các kích thước: đáy là hình vuông cạnh 20 cm và chiều cao là 5 cm (như hình vẽ). Để đảm bảo bánh không bị cháy, người ta cần sơn lớp chống dính vào toàn bộ bề mặt bên trong của khuôn.



- Tính diện tích cần sơn của một cái khuôn làm bánh.
- Hỏi với một lượng sơn chống dính đủ để bao phủ 100 m² bề mặt thì sơn được bao nhiêu cái khuôn làm bánh như trên?

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 60^\circ$ và đường cao AH. Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HB$.

- Chứng minh: $AB = AD$.
- Kẻ CE vuông góc với AD tại E. Đường thẳng CE cắt đường thẳng AH tại F. Chứng minh FD song song với AB.
- Chứng minh: BH là tia phân giác góc ABF.
- Chứng minh: $AE = 3DE$.

Bài 5. Tìm đa thức dư $R(x)$ trong phép chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $g(x) = x^2 - 1$, biết rằng:

$$f(x) = x^{2026} + x^{2025} + x^{2024} + \dots + x^2 + x + 1.$$