

**Bài 1: (4,0 điểm)**

Cho biểu thức  $A = \frac{x+3\sqrt{x}-10}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-2}$  với  $x \geq 0, x \neq 4$ .

1. Rút gọn biểu thức  $A$ .
2. Tìm tất cả các giá trị của  $x$  để  $A = 3$ .

**Bài 2: (3,0 điểm)**

1. Bác An đi chợ mua trứng vịt muối hết 120 nghìn đồng. Người bán thấy trứng nhỏ nên đã chủ động cho thêm 4 quả trứng vịt muối. Do đó giá mỗi quả trứng đã giảm đi 1 nghìn đồng. Tìm số trứng vịt muối ban đầu bác An mua.

2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy - y^2 = 4(x - y) \\ \sqrt{x-2} - \sqrt{3y-x+3} = 1-x \end{cases}$$

**Bài 3: (3,0 điểm)**

Cho parabol  $(P): y = x^2$  và đường thẳng  $(d): y = x + m^2 + 1$  ( $m$  là tham số).

1. Chứng minh rằng  $(d)$  luôn cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt.
2. Gọi  $x_1, x_2$  lần lượt là hoành độ giao điểm của  $(d)$  và  $(P)$ . Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để  $x_1^2 + x_2 = 11$ .

**Bài 4: (2,0 điểm)**

Trong hộp gồm 100 lá thăm kích thước như nhau được đánh số từ 1 đến 100. Chọn ngẫu nhiên một lá thăm trong hộp. Gọi  $A$  và  $B$  là hai biến cố thỏa  $A$ : “Số ghi trên lá thăm chia hết cho 3” và  $B$ : “Số ghi trên lá thăm vừa chia hết cho 3 vừa chia cho 5 dư 1”.

1. Tính số kết quả thuận lợi cho biến cố  $A$ .
2. Tính xác suất biến cố  $B$ .

**Bài 5: (2,0 điểm)**

Cho  $n$  là số nguyên dương và phương trình nghiệm nguyên  $(2x - y)(x + y) = n$ .

1. Giải phương trình với  $n = 5$ .
2. Tìm số nghiệm nguyên của phương trình khi  $n = 630$ .

**Bài 6: (4,0 điểm)**

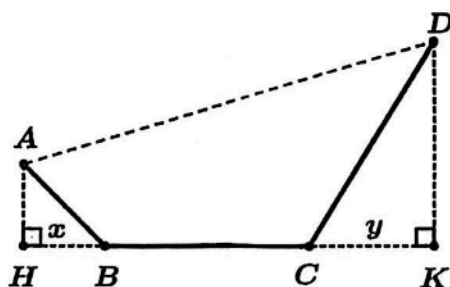
Cho tam giác  $ABC$  nhọn ( $AB < AC$ ) nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Đường trung trực của đoạn thẳng  $BC$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $E, F$  (điểm  $F$  thuộc cung nhỏ  $BC$ ). Gọi  $D$  là giao điểm của  $BC$  và  $AF$ .

1. Chứng minh rằng  $FB^2 = FD.FA$ .
2. Đường tròn tâm  $F$  bán kính  $FB$  cắt  $AF$  tại  $I$ . Gọi  $H$  (khác  $E$ ) là giao điểm của  $EI$  và  $(O)$ ,  $T$  là giao điểm của  $FH$  và  $BC$ . Chứng minh rằng  $\widehat{FBH} = \widehat{FTB}$ .
3. Chứng minh rằng bốn điểm  $A, D, H, T$  cùng thuộc một đường tròn và  $\widehat{TIF} = 90^\circ$ .

**Bài 7: (2,0 điểm)**

Một khu đất hình thang  $AHKD$  có  $\widehat{H} = \widehat{K} = 90^\circ$ ,  $AH = 1\text{km}$ ,  $DK = 2,4\text{km}$  và  $HK = 4,8\text{km}$ . Người ta dự định thiết lập một đường bay cho drone như sau: xuất phát từ điểm  $A$  bay theo đường gấp khúc  $ABCD$  để đến  $D$ . Trong đó  $B$  và  $C$  là hai điểm thay đổi thuộc đoạn thẳng  $HK$ . Do địa hình phức tạp, vận tốc bay của drone trên các đoạn thẳng  $AB$ ,  $CD$  và  $BC$  lần lượt là  $30\text{km/h}$ ,  $40\text{km/h}$  và  $50\text{km/h}$ . (tham khảo hình vẽ)

1. Đặt  $HB = x, CK = y$ . Hãy thiết lập công thức tính thời gian bay từ  $A$  đến  $D$  của drone theo  $x, y$ .
2. Tìm thời gian bay nhanh nhất của drone.



-----HẾT-----

*Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.*

# Đáp án tham khảo Đề thi tuyển sinh vào THPT chuyên tỉnh Đồng Tháp năm 2026 – 2027, môn Toán chuyên

Câu lạc bộ Toán học, trường THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt

## I Giới thiệu

Bài thi môn Toán chuyên trong đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên tỉnh Đồng Tháp năm 2026 – 2027 đã kết thúc vào sáng ngày 28 tháng 5 năm 2026. Nhìn chung, đề thi đã bám sát “Phạm vi và cấu trúc đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên năm học 2026 – 2027” của tỉnh Đồng Tháp. Về độ khó, các câu hỏi được sắp xếp theo mức độ từ dễ đến khó, và đều thuộc các chủ đề quen thuộc trong các chủ đề thi vào THPT chuyên các tỉnh thành trên cả nước.

Với mong muốn mang đến lời giải và bình luận về đề thi, các bạn học sinh của *Câu lạc bộ Toán học, trường THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, An Giang* (HMC) đã viết tài liệu này. Mong rằng, đây là tài liệu tốt với các bạn học sinh ở Đồng Tháp nói riêng và các bạn đang chuẩn bị cho kì thi vào THPT chuyên vào cả nước nói chung.

Dù đã qua kiểm tra kĩ lưỡng, tài liệu này vẫn có thể có sai sót. Nếu bạn đọc tìm thấy lỗi trong tài liệu, đừng ngần ngại liên hệ chúng tôi tại [humadamathclub \[at\] gmail dot com](mailto:humadamathclub[at]gmail[dot]com).

Trong tài liệu này, chúng tôi có sử dụng các kí hiệu:

- Với hai số nguyên  $a$  và  $b$ ,  $a \mid b$  kí hiệu mệnh đề “ $a$  là ước của  $b$ ”.
- Hai (hệ) phương trình tương đương (tức có cùng tập nghiệm) vẫn có thể được nối liền bằng dấu  $\Leftrightarrow$ , để bố cục của văn bản được “ngăn nắp” hơn.

*There's nothing here to end.*

Math at the Humada School

## II Đề thi

**Bài 1. (4,0 điểm)** Cho biểu thức  $A = \frac{x + 3\sqrt{x} - 10}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3)} + \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} - 2}$  với  $x \geq 0, x \neq 4$ .

1. Rút gọn biểu thức  $A$ .
2. Tìm tất cả các giá trị của  $x$  để  $A = 3$ .

**Bài 2. (3,0 điểm)**

1. Bác An đi chợ mua trứng vịt muối hết 120 nghìn đồng. Người bán thấy trứng nhỏ nên đã chủ động cho thêm 4 quả trứng vịt muối. Do đó giá mỗi quả trứng đã giảm đi 1 nghìn đồng. Tìm số trứng vịt muối ban đầu bác An mua.
2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy - y^2 = 4(x - y) \\ \sqrt{x - 2} - \sqrt{3y - x + 3} = 1 - x \end{cases}$$

**Bài 3. (3,0 điểm)** Cho parabol  $(P): y = x^2$  và đường thẳng  $y = x + m^2 + 1$  ( $m$  là tham số).

1. Chứng minh rằng  $(d)$  luôn cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt.
2. Gọi  $x_1, x_2$  lần lượt là hoành độ giao điểm của  $(d)$  và  $(P)$ . Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để  $x_1^2 + x_2 = 11$ .

**Bài 4. (2,0 điểm)** Trong hộp gồm 100 lá thăm kích thước như nhau được đánh số từ 1 đến 100. Chọn ngẫu nhiên một lá thăm trong hộp. Gọi  $A$  và  $B$  là hai biến cố  $\square A$ : “Số ghi trên lá thăm chia hết cho 3” và  $B$ : “Số ghi trên lá thăm vừa chia hết cho 3 vừa chia cho 5 dư 1”.

1. Tính số kết quả thuận lợi cho biến cố  $A$ .
2. Tính xác suất biến cố  $B$ .

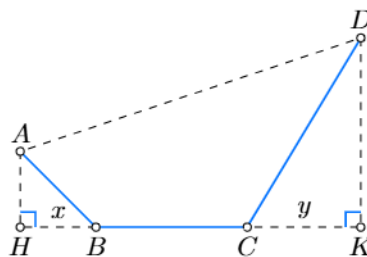
**Bài 5. (2,0 điểm)** Cho  $n$  là số nguyên dương và phương trình nghiệm nguyên  $(2x - y)(x + y) = n$ .

1. Giải phương trình với  $n = 5$ .
2. Tìm số nghiệm nguyên của phương trình khi  $n = 630$ .

**Bài 6. (4,0 điểm)** Cho tam giác  $ABC$  nhọn ( $AB < AC$ ) nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Đường trung trực của đoạn thẳng  $BC$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $E, F$  (điểm  $F$  thuộc cung nhỏ  $BC$ ). Gọi  $D$  là giao điểm của  $BC$  và  $AF$ .

1. Chứng minh rằng  $FB^2 = FD \cdot FA$ .
2. Đường tròn tâm  $F$  bán kính  $FB$  cắt  $AF$  tại  $I$ . Gọi  $H$  (khác  $E$ ) là giao điểm của  $EI$  và  $(O)$ ,  $T$  là giao điểm của  $FH$  và  $BC$ . Chứng minh rằng  $\widehat{FBH} = \widehat{FTB}$ .
3. Chứng minh rằng bốn điểm  $A, D, H, T$  cùng thuộc một đường tròn và  $\widehat{TIF} = 90^\circ$ .

**Bài 7. (2,0 điểm)** Một khu đất hình thang  $AHKD$  có  $\widehat{H} = \widehat{K} = 90^\circ$ ,  $AH = 1\text{km}$ ,  $DK = 2,4\text{km}$  và  $HK = 4,8\text{km}$ . Người ta dự định thiết lập một đường bay cho drone<sup>1</sup> như sau: xuất phát từ điểm  $A$  bay theo đường gấp khúc  $ABCD$  để đến  $D$ . Trong đó  $B$  và  $C$  là hai điểm thay đổi thuộc đoạn thẳng  $HK$ . Do địa hình phức tạp, vận tốc bay của drone trên các đoạn thẳng  $AB, CD$  và  $BC$  lần lượt là 30km/h, 40km/h và 50km/h. (tham khảo hình vẽ)



1. Đặt  $HB = x, CK = y$ . Hãy thiết lập công thức tính thời gian bay từ  $A$  đến  $D$  của drone theo  $x, y$ .
2. Tìm thời gian bay nhanh nhất của drone.

<sup>1</sup>máy bay không người lái

### III Đáp án

**Bài 1. (4,0 điểm)** Cho biểu thức  $A = \frac{x + 3\sqrt{x} - 10}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3)} + \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} - 2}$  với  $x \geq 0, x \neq 4$ .

1. Rút gọn biểu thức  $A$ .
2. Tìm tất cả các giá trị của  $x$  để  $A = 3$ .

*Lời giải.*

1. Với điều kiện như lệnh cho, ta thấy:

$$\begin{aligned} A &= \frac{x + 3\sqrt{x} - 10 + (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2) - (\sqrt{x} - 4)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3)} \\ &= \frac{x + 3\sqrt{x} - 10 + x - \sqrt{x} - 2 - x + \sqrt{x} + 12}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3)} \\ &= \frac{x + 3\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}. \end{aligned}$$

2. Với điều kiện đã nêu,  $A = 3$  khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} &= 3 \Leftrightarrow 3(\sqrt{x} - 2) = \sqrt{x} \\ &\Leftrightarrow 3\sqrt{x} - 6 = \sqrt{x} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9. \end{aligned}$$

$x = 9$  thỏa mãn điều kiện đã cho nên là giá trị duy nhất thỏa mãn yêu cầu.

**Bài 2. (3,0 điểm)**

1. Bác An đi chợ mua trứng vịt muối hết 120 nghìn đồng. Người bán thấy trứng nhỏ nên đã chủ động cho thêm 4 quả trứng vịt muối. Do đó giá mỗi quả trứng đã giảm đi 1 nghìn đồng. Tìm số trứng vịt muối ban đầu bác An mua.
2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy - y^2 = 4(x - y) \\ \sqrt{x - 2} - \sqrt{3y - x + 3} = 1 - x \end{cases}.$$

*Lời giải.*

1. Gọi số trứng vịt muối ban đầu là  $x$  (trứng), với  $x$  là số tự nhiên.

Ta có bảng sau:

**Bảng 1:** Mối liên hệ giữa các đại lượng trong bài toán.

|                          | Số quả trứng | Tổng số tiền<br>(nghìn đồng) | Số tiền trên mỗi quả trứng<br>(nghìn đồng/trứng) |
|--------------------------|--------------|------------------------------|--------------------------------------------------|
| Trước khi được cho trứng | $x$          | 120                          | $\frac{120}{x}$                                  |
| Sau khi được cho trứng   | $x + 4$      | 120                          | $\frac{120}{x + 4}$                              |

Từ đó, theo dữ kiện nêu ra ở bài toán, ta thấy rằng  $\frac{120}{x} = \frac{120}{x + 4} + 1$ .

Phương trình  $\frac{120}{x} = \frac{120}{x + 4} + 1$  có hai nghiệm là  $x = -24, x = 20$ ; và ta thấy chỉ có số  $x = 20$  thỏa mãn điều kiện đã cho. Do đó đáp án của bài toán là 20 trứng vịt muối.

2. Điều kiện xác định của hệ phương trình đã cho là  $x \geq 2$  và  $3y \geq x - 3$ .

Gọi (1) và (2) theo thứ tự là phương trình thứ nhất và thứ hai của hệ phương trình. Ta thấy:

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow (x - y)(3x + y) = 4(x - y) \\ &\Leftrightarrow (x - y)(3x + y - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.\end{aligned}$$

Có được biến đổi cuối là vì với điều kiện xác định,

$$y + 3x - 4 \geq \frac{x - 3}{3} + 3x - 4 \geq \frac{2 - 3}{3} + 3(2) - 4 = \frac{5}{3} > 0.$$

Thay  $y = x$  vào phương trình (2), ta được phương trình sau, kí hiệu là (3), cùng các phương trình tương đương với nó:

$$\begin{aligned}\sqrt{x - 2} - \sqrt{2x + 3} &= 1 - x \Leftrightarrow \sqrt{2x - 3} - 3 - \sqrt{x - 2} + 1 = x - 3 \\ &\Leftrightarrow (x - 3) \left( \frac{2}{\sqrt{2x + 3} + 3} - \frac{1}{\sqrt{x - 2} + 1} - 1 \right) = 0.\end{aligned}$$

Ta thấy với  $x \geq 2$ :

$$\begin{aligned}\bullet \quad &\frac{2}{\sqrt{2x + 3} + 3} \leq \frac{2}{\sqrt{2(2) + 3} + 3} < \frac{2}{3 + 3} < 1; \\ \bullet \quad &\frac{1}{\sqrt{x - 2} + 1} + 1 > 1\end{aligned}$$

nên  $\left( \frac{2}{\sqrt{2x + 3} + 3} - \frac{1}{\sqrt{x - 2} + 1} - 1 \right) > 0$ . Do đó (3) tương đương với  $x - 3 = 0$  và  $x = 3$ .

Thử lại ta thấy  $(x; y) = (3; 3)$  thỏa mãn điều kiện xác định nên là cặp nghiệm (duy nhất) của hệ phương trình đã cho.

**Bài 3. (3,0 điểm)** Cho parabol  $(P) : y = x^2$  và đường thẳng  $y = x + m^2 + 1$  ( $m$  là tham số).

1. Chứng minh rằng  $(d)$  luôn cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt.
2. Gọi  $x_1, x_2$  lần lượt là hoành độ giao điểm của  $(d)$  và  $(P)$ . Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để  $x_1^2 + x_2 = 11$ .

*Lời giải.*

1. Phương trình hoành độ giao điểm của  $(d)$  và  $(P)$ ,  $x^2 = x + m^2 + 1$  hay  $x^2 - x - (m^2 + 1) = 0$ , có hai nghiệm phân biệt – do có tích  $ac = 1 \cdot (-(m^2 + 1)) = -m^2 - 1 < 0$  – nên ta có điều cần chứng minh.
2. Vì  $x_1$  là hoành độ một giao điểm của  $(d)$  và  $(P)$  nên  $x_1^2 = x_1 + m^2 + 1$ . Theo định lý Viète,  $x_1 + x_2 = 1$ , do đó tham số  $m$  thỏa mãn yêu cầu đề bài khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned}x_2 + x_1^2 &= 11 \Leftrightarrow x_2 + x_1 + m^2 + 1 = 11 \\ &\Leftrightarrow m^2 + 2 = 11 \\ &\Leftrightarrow m^2 = 9 \Leftrightarrow m = 3 \text{ hoặc } m = -3.\end{aligned}$$

**Bài 4. (2,0 điểm)** Trong hộp gồm 100 lá thăm kích thước như nhau được đánh số từ 1 đến 100. Chọn ngẫu nhiên một lá thăm trong hộp. Gọi  $A$  và  $B$  là hai biến cố  $\square$   $A$ : “Số ghi trên lá thăm chia hết cho 3” và  $B$ : “Số ghi trên lá thăm vừa chia hết cho 3 vừa chia cho 5 dư 1”.

1. Tính số kết quả thuận lợi cho biến cố  $A$ .
2. Tính xác suất biến cố  $B$ .

*Lời giải.*

Trong phép thử trên, có 100 kết quả xảy ra, mỗi kết quả ứng với việc lấy ra một lá thăm được đánh số từ 1 đến 100, và tất cả chúng đều đồng khả năng xảy ra.

Bằng cách đếm trực tiếp, ta thấy có 33 số trong bảng có ô được tô đậm, 7 số có ô được đánh dấu chấm trong bảng sau. Do đó, ta trả lời được đáp án của các ý trong bài là:

1. 33.
2.  $\frac{7}{100}$ .

**Bảng 2:** Bảng các số từ 1 đến 100. Các số có ô tô màu đậm là các số chia hết cho 3; các số có ô được đánh các dấu chấm là các số vừa chia hết cho 3 vừa chia 5 dư 1.

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10  |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20  |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30  |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40  |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50  |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60  |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70  |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80  |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90  |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

*Chú thích.* Ngoài cách đếm trực tiếp, có thể sử dụng nhận xét “Một số nguyên chia hết cho 3 và chia 5 dư 1 khi và chỉ khi nó có dạng  $15k + 6$  với  $k$  là số tự nhiên”. Khi đó số các số nguyên  $k$  thỏa mãn là thậm viết số  $k$  là một kết quả thuận lợi cho  $B$  là  $\left\lfloor \frac{100 + (15 - 6)}{15} \right\rfloor = 7$ .

**Bài 5. (2,0 điểm)** Cho  $n$  là số nguyên dương và phương trình nghiệm nguyên  $(2x - y)(x + y) = n$ .

1. Giải phương trình với  $n = 5$ .
2. Tìm số nghiệm nguyên của phương trình khi  $n = 630$ .

*Lời giải.*

1. Ta thấy vì  $5 = 1 \cdot 5 = (-5) \cdot (-1)$  nên  $(x; y)$  là một cặp nghiệm nguyên của phương trình khi và chỉ khi một trong bốn trường hợp sau xảy ra:

$$\begin{aligned}
 & \bullet \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \quad \bullet \begin{cases} 2x - y = -5 \\ x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \\
 & \bullet \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \quad \bullet \begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Từ đó ta thấy  $(x; y) = (2; -1)$ ,  $(x; y) = (2; 3)$ ,  $(x; y) = (-2; 1)$  và  $(x; y) = (-2; -3)$  là bốn cặp nghiệm nguyên duy nhất của phương trình.

2. Với  $a, b$  là hai số nguyên; ta xét hệ phương trình sau cùng các hệ phương trình tương đương với nó:

$$\begin{cases} 2x - y = a \\ x + y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = b \\ 3x = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a + b}{3} \\ y = \frac{-a + 2b}{3} \end{cases}$$

Từ đó, ta thấy rằng hệ phương trình đã nêu có nghiệm nguyên khi và chỉ khi  $3 \mid a + b$ .<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Ta thấy rằng  $-a + 2b \equiv -a - b + 3b \equiv a + b \pmod{3}$ , do đó điều kiện  $3 \mid -a + 2b$  được lược bỏ.

Ta gọi cặp số nguyên  $(u; v)$  là tốt nếu  $uv = 630$  và có hai số nguyên  $x, y$  sao cho  $2x - y = u$  và  $x + y = v$ . Ta thấy rằng số cặp số tốt là đáp án bài toán. Vì cặp số  $(u; v)$  là tốt khi và chỉ khi  $uv = 630$  và  $3 \mid u + v$ , do đó nếu  $(u; v)$  là cặp số tốt thì  $(-u; -v)$  cũng là cặp số tốt.

Xét cặp số tốt dương  $(u; v)$ .

**Nhận xét.**  $3 \mid u$  và  $3 \mid v$ .

**Chứng minh.** Vì  $3 \mid 630 = uv$  nên có ít nhất một số  $u$  và  $v$  chia hết cho 3. Không mất tính tổng quát, giả sử  $3 \mid u$ .

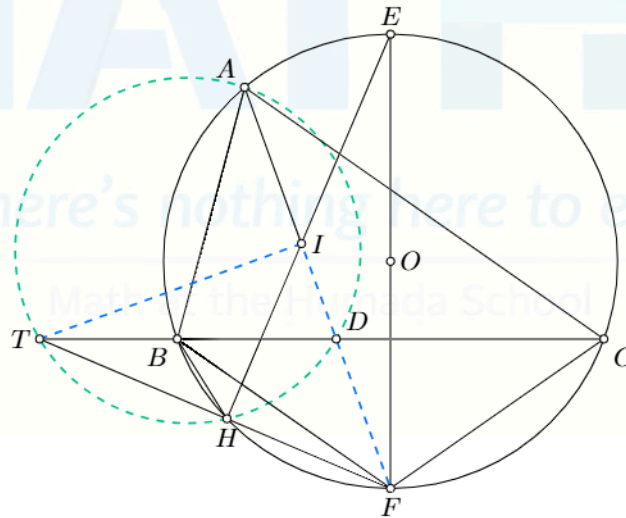
Nếu  $9 \mid u$  thì vì  $630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$  nên  $3 \nmid v$ . Khi đó  $3 \nmid u + v$ , mâu thuẫn. Do đó  $9 \nmid u$  và theo phân tích nguyên tố như trên của 630, ta thấy 3 cũng phải là ước của  $v$ . Do đó có điều cần chứng minh.  $\square$

Đặt  $u = 3u'$ ,  $v = 3v'$ ; khi đó  $u'v' = 70$ . Vì  $70 = 2 \times 5 \times 7$  nên có  $(1+1)(1+1)(1+1) = 8$  ước dương; tương ứng với đó có 8 cặp số  $(u'; v')$  thỏa mãn. Vậy có 8 cặp số tốt dương. Theo nhận xét trên; ta cũng có 8 cặp số tốt âm. Do đó tổng số cặp số tốt là 16, và cũng là đáp án của bài toán.

**Bài 6. (4,0 điểm)** Cho tam giác  $ABC$  nhọn ( $AB < AC$ ) nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Đường trung trực của đoạn thẳng  $BC$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $E, F$  (điểm  $F$  thuộc cung nhỏ  $BC$ ). Gọi  $D$  là giao điểm của  $BC$  và  $AF$ .

1. Chứng minh rằng  $FB^2 = FD \cdot FA$ .
2. Đường tròn tâm  $F$  bán kính  $FB$  cắt  $AF$  tại  $I$ . Gọi  $H$  (khác  $E$ ) là giao điểm của  $EI$  và  $(O)$ ,  $T$  là giao điểm của  $FH$  và  $BC$ . Chứng minh rằng  $\widehat{FBH} = \widehat{FTB}$ .
3. Chứng minh rằng bốn điểm  $A, D, H, T$  cùng thuộc một đường tròn và  $\widehat{TIF} = 90^\circ$ .

**Lời giải.** Xét thể hình sau.



Hình 1

1. Đường trung trực của  $BC$  đi qua điểm  $O$ , do đó  $EF$  là đường kính của  $(O)$ , và hơn nữa  $\widehat{BE} = \widehat{CE}$ ,  $\widehat{BF} = \widehat{CF}$ .

Hai tam giác  $FBD$  và  $FAB$  có cùng góc  $\widehat{BFA}$  và  $\widehat{FBC} = \widehat{FAC} = \widehat{FAB}$  (nhận xét trên và định lý góc nội tiếp) nên là hai tam giác đồng dạng theo trường hợp góc-góc, do đó  $\frac{FB}{FA} = \frac{FD}{FB}$ , hay cách nói khác của điều cần chứng minh.

2. Áp dụng định lý về góc ngoài của tam giác vào  $\triangle TBF$ , ta thấy rằng:

$$\widehat{FTC} = \widehat{BCF} - \widehat{BFH} = \frac{1}{2}(\widehat{CF} - \widehat{BH}) = \frac{1}{2}(\widehat{BF} - \widehat{BH}) = \frac{1}{2}\widehat{HF} = \widehat{FBH}.$$

3. (a) Hai tam giác  $FBH$  và  $FTB$  có chung góc  $\widehat{TFB}$  và  $\widehat{FBH} = \widehat{FTB}$  nên là hai tam giác đồng dạng, do đó  $\frac{FB}{FT} = \frac{FH}{FB}$  hay  $FB^2 = FH \cdot FT$ .

Hai tam giác  $FHD$  và  $FAT$  đồng dạng do chúng có cùng góc  $\widehat{TFA}$  và  $\frac{FH}{FA} = \frac{FD}{FT}$  (do  $FH \cdot FT = FD \cdot FA = FB^2$ ); do đó tứ giác  $TADH$  có

$$\widehat{TAD} + \widehat{THD} = \widehat{DHF} + \widehat{THD} = 180^\circ$$

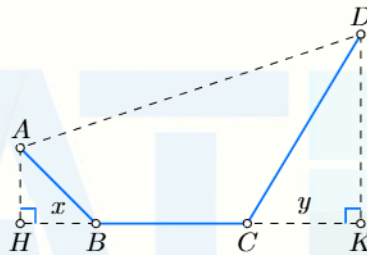
và là tứ giác nội tiếp, từ đó có điều cần chứng minh.

- (b)  $\triangle FHI$  và  $\triangle FIT$  nhận  $\widehat{TFI}$  là góc chung, hơn thế vì  $FI^2 = FB^2 = FH \cdot FT$  nên  $\frac{FI}{FT} = \frac{FH}{FI}$ , nên chúng là hai tam giác đồng dạng với nhau. Suy ra  $\widehat{FIT} = \widehat{FHI}$ .

Vì  $EF$  là đường kính của  $(O)$  nên  $\widehat{FHI} = \widehat{FHE} = 90^\circ$ . Các yêu cầu của bài toán đã được hoàn thành.

*Chú thích.* Ý đầu của ý sau cùng có thể được chứng minh gọn hơn, nhờ vào lưu ý rằng  $\widehat{FTB} = \widehat{FBH} = \widehat{FAH}$ .

**Bài 7. (2,0 điểm)** Một khu đất hình thang  $AHKD$  có  $\widehat{H} = \widehat{K} = 90^\circ$ ,  $AH = 1\text{km}$ ,  $DK = 2,4\text{km}$  và  $HK = 4,8\text{km}$ . Người ta dự định thiết lập một đường bay cho drone<sup>a</sup> như sau: xuất phát từ điểm  $A$  bay theo đường gấp khúc  $ABCD$  để đến  $D$ . Trong đó  $B$  và  $C$  là hai điểm thay đổi thuộc đoạn thẳng  $HK$ . Do địa hình phức tạp, vận tốc bay của drone trên các đoạn thẳng  $AB$ ,  $CD$  và  $BC$  lần lượt là  $30\text{km/h}$ ,  $40\text{km/h}$  và  $50\text{km/h}$ . (tham khảo hình vẽ)



- Đặt  $HB = x$ ,  $CK = y$ . Hãy thiết lập công thức tính thời gian bay từ  $A$  đến  $D$  của drone theo  $x$ ,  $y$ .
- Tìm thời gian bay nhanh nhất của drone.

<sup>a</sup>máy bay không người lái

*Lời giải.*

1. Theo định lý Pythagore,  $AB = \sqrt{1+x^2}$  và  $CD = \sqrt{2,4^2+y^2}$ . Công thức tính thời gian theo yêu cầu:

$$T = \frac{\sqrt{1+x^2}}{30} + \frac{\sqrt{2,4^2+y^2}}{40} + \frac{4,8-x-y}{50} \text{ (h)}.$$

2. Ta có:

$$\begin{aligned} T &= \frac{4,8}{50} + \left( \frac{\sqrt{1+x^2}}{30} - \frac{x}{50} \right) + \left( \frac{\sqrt{2,4^2+y^2}}{40} - \frac{y}{50} \right) \\ &= \frac{12}{125} + \frac{1}{150} (5\sqrt{1+x^2} - 3x) + \frac{1}{200} (5\sqrt{2,4^2+y^2} - 4y) \text{ (h)}. \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy–Schwarz–Bunyakovsky, kèm với lưu ý  $x > 0$ ,  $y > 0$ :

- $5\sqrt{1+x^2} = \sqrt{(4^2+3^2)(1+x^2)} \geq |4 \cdot 1 + 3 \cdot x| = 4 + 3x$  hay  $5\sqrt{1+x^2} - 3x \geq 4$ ,
- $5\sqrt{2,4^2+y^2} \geq |3 \cdot 2,4 + 4 \cdot y| = 7,2 + 4y$ , hay  $5\sqrt{2,4^2+y^2} - 4y \geq \frac{36}{5}$ .

Do đó:

$$T \geq \frac{12}{125} + \frac{1}{150} \cdot 4 + \frac{1}{200} \cdot \frac{36}{5} = \frac{119}{750} \text{ (h)}.$$

Khi  $x = \frac{3}{4}$  và  $y = \frac{16}{5}$ , ta thấy  $5\sqrt{1+x^2} - 3x = 4$  và  $5\sqrt{2,4^2+y^2} - 4y = \frac{36}{5}$ ; khi đó  $T = \frac{119}{750}$ (h).

Vậy thời gian bay nhanh nhất của drone là  $\frac{119}{750}$  giờ hay 9 phút 31,2 giây.

# MATHS

*There's nothing here to end.*

Math at the Humada School