

Đề thi gồm có: 01 trang

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Họ và tên thí sinh:

Số báo danh:

Câu 1. (2,5 điểm)

- a) Cho a, b là các số thực thoả mãn $ab + \sqrt{ab+1} + \sqrt{(a^2+b)} \cdot \sqrt{(b^2+a)} = 0$. Tính giá trị biểu thức $S = a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b}$.
- b) Mỗi cạnh của một hình vuông được tô màu một cách ngẫu nhiên bởi một trong ba màu xanh, đỏ hoặc vàng. Tính xác suất để hai cạnh kề nhau bất kì của hình vuông luôn khác màu.

Câu 2. (2 điểm)

- a) Cho các số thực a, b, c không nhỏ hơn 1. Chứng minh:

$$\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c} + \frac{\sqrt{bc-1}}{c+a} + \frac{\sqrt{ca-1}}{a+b} \leq \frac{a+b+c}{4}.$$

- b) Cho đa thức $f(x) = a^{2026}x^2 + bx + a^{2026}c - 1$, với a, b, c là các số nguyên. Giả sử rằng phương trình $f(x) = -2$ có hai nghiệm nguyên dương. Chứng minh: $\frac{(f(1))^2 + (f(-1))^2}{2}$ là hợp số.

Câu 3. (1.5 điểm)

Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương, đôi một nguyên tố cùng nhau (a, b, c) sao cho với mọi số nguyên dương n thì biểu thức $(a^n + b^n + c^n)^2$ chia hết cho $ab + bc + ca$.

Câu 4. (3.0 điểm)

Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) và có I là tâm đường tròn nội tiếp. Đường tròn đường kính AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai M . Các đường thẳng AM , BC cắt nhau tại K . Gọi E là giao điểm thứ hai của AI và đường tròn (O) .

- a) Chứng minh KI vuông góc với AI .
- b) Gọi N là giao điểm thứ hai của KE với đường tròn (O) . Chứng minh:

$$\frac{MC}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} = \frac{AB}{AC}.$$

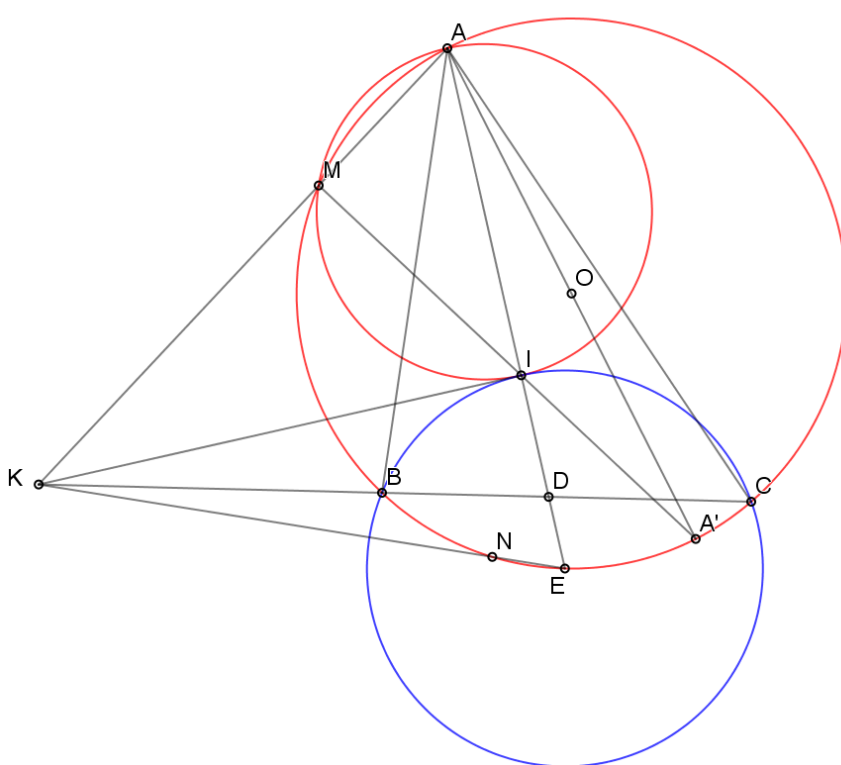
Câu 5. (1.0 điểm)

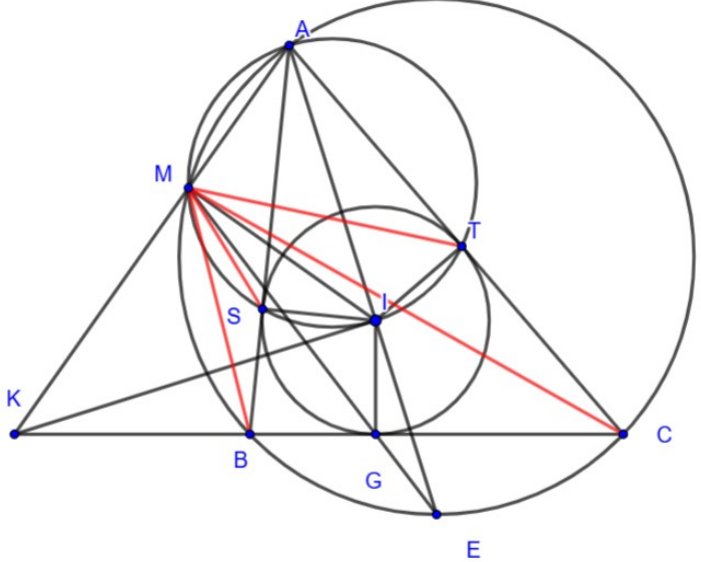
Một khu vực được chia thành lưới 8×8 gồm 64 ô vuông. Một số ô được đặt camera giám sát. Một ô không có camera gọi là được giám sát đầy đủ nếu tổng số camera nằm trên hàng và cột chứa ô đó không nhỏ hơn 8. Biết rằng mọi ô không có camera đều được giám sát đầy đủ. Hỏi: Có thể có nhiều nhất bao nhiêu ô không có camera?

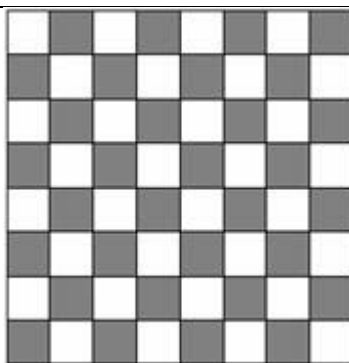
Đáp án kì thi thử lần 2

Câu	Nội Dung	Điểm
Câu 1		
1.a (1.5 điểm)	Ta có $ab + \sqrt{ab+1} + \sqrt{(a^2+b)(b^2+a)} = 0 \Rightarrow \sqrt{(a^2+b)(b^2+a)} = -ab - \sqrt{ab+1}$ $\Rightarrow (a^2+b)(b^2+a) = a^2b^2 + 2ab\sqrt{ab+1} + ab + 1$ $\Rightarrow a^3 + b^3 = 2ab\sqrt{ab+1} + 1$	0.5
	Ta có $S^2 = a^2(b^2+a) + b^2(a^2+b) + 2ab\sqrt{(b^2+a)(a^2+b)}$ $= a^3 + b^3 + 2a^2b^2 + 2ab(-ab - \sqrt{ab+1})$ $= 2ab\sqrt{ab+1} + 1 + 2a^2b^2 + 2ab(-ab - \sqrt{ab+1})$ $= 1$	0.5
	Do $ab = -(\sqrt{ab+1} + \sqrt{(a^2+b)(b^2+a)}) \leq 0$. Giả sử $a \geq 0$ và $b \leq 0$. Khi đó $a\sqrt{b^2+a} \geq a\sqrt{b^2} \geq -ab$ và $\sqrt{a^2+b} \leq a \Rightarrow b\sqrt{a^2+b} \geq ab$. Do đó $S \geq -ab + ab = 0$ Suy ra $S = 1$.	0.5
1.b (1 điểm)		
	Giả sử hình vuông cần tô là $ABCD$. Mỗi một cạnh có ba cách tô màu nên số cách tô màu các cạnh của hình vuông là $3.3.3.3 = 81$.	0.25
	Ta xác định số cách tô màu cạnh hình vuông để không có hai cạnh nào kề nhau cùng màu TH1. Nếu AD và BC được tô cùng màu, thì có ba cách chọn màu để tô hai đoạn thẳng này. Khi đó ta chỉ cần chọn màu khác màu của AD để tô cho AB và CD. Do đó mỗi cạnh AB và CD có 2 cách tô màu. Do đó có $3.2.2 = 12$ cách tô màu. TH2. Nếu AD và BC tô khác màu nhau. Khi đó AD có 3 cách tô màu, BC có hai cách tô màu. Vì AB và CD thì phải tô khác màu với cả AD và BC nên mỗi đoạn chỉ có 1 cách tô. Do đó có $3.2.1.1 = 6$ cách tô. Vậy số cách tô màu thỏa mãn là $12 + 6 = 18$.	0.5
	Xác suất để tô được hình vuông có hai cạnh kề nhau khác màu là :	0.25

	$\frac{18}{81} = \frac{2}{9}$	
Câu 2		
2.a (1 điểm)	Ta có $b + c \geq 2\sqrt{bc}$. Suy ra $\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{ab-1}{bc}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{c}} \cdot \sqrt{\left(a - \frac{1}{b}\right)}$	0.5
	Lại có $\sqrt{\frac{1}{c}} \cdot \sqrt{\left(a - \frac{1}{b}\right)} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} + a - \frac{1}{b}\right)$. Suy ra $\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c} + a - \frac{1}{b}\right)$	0.25
	Chúng minh tương tự ta có : $\frac{\sqrt{bc-1}}{c+a} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + b - \frac{1}{c}\right)$ $\frac{\sqrt{ca-1}}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b} + c - \frac{1}{a}\right)$ Suy ra $\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c} + \frac{\sqrt{bc-1}}{c+a} + \frac{\sqrt{ca-1}}{a+b} \leq \frac{a+b+c}{4}$	0.25
2.b(1 điểm)	Giả sử $a^{2026}x^2 + bx + a^{2026}c + 1 = 0$ có hai nghiệm nguyên là r và s . Khi đó $r.s = c + \frac{1}{a^{2026}}$ là số nguyên nên $a^{2026} = 1$. Do đó $f(x) = x^2 + bx + c - 1$	0.25
	Xét phương trình $x^2 + bx + c + 1 = 0$. Theo định lý Viét có $\begin{cases} r + s = -b \\ rs = c + 1 \end{cases}$. Có $f(1) = b + c, f(-1) = c - b$.	0.25
	Do đó $(f(1))^2 + f(-1)^2 = (b + c)^2 + (c - b)^2 = 2(b^2 + c^2)$. Suy ra $\frac{(f(1)^2 + f(-1)^2)}{2} = b^2 + c^2 = (r + s)^2 + (rs - 1)^2 = r^2s^2 + r^2 + s^2 + 1 = (r^2 + 1)(s^2 + 1)$. Vì $r^2 + 1 \geq 2, s^2 + 1 \geq 2$ nên $\frac{(f(1)^2 + f(-1)^2)}{2}$ là hợp số.	0.5
Câu 3. (1.5 điểm)		
	Với mọi n thì $(a^n + b^n + c^n)^2$ chia hết cho $ab + bc + ca$. Cho $n = 1$ thì $(a + b + c)^2 : (ab + bc + ca) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 : (ab + bc + ca)$ Ta có $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) : (ab + bc + ca)$. Cho $n = 3$ thì $(a^3 + b^3 + c^3)^2 : (ab + bc + ca)$ Suy ra $9a^2b^2c^2 : (ab + bc + ca)$ Vì $(a, b) = (b, c) = (c, a) = 1$ nên $(abc; ab + bc + ca) = 1$. Do đó $ab + bc + ca 9$. Suy ra $ab + bc + ca \leq 9$	0.5

	Giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó $3c^2 \leq ab + bc + ca \leq 9 \Rightarrow c^2 \leq 3 \Rightarrow c = 1$. Do đó $ab + a + b 9$. Vì $ab + a + b \geq 3$ nên $ab + a + b \in \{3; 9\}$. Nếu $ab + b + a = 3$ thì $a = b = 1$. Do đó $(a; b; c) = (1; 1; 1)$. Nếu $ab + a + b = 9 \Rightarrow (a + 1)(b + 1) = 10 \Rightarrow a = 4, b = 1$. Thử lại Khi $a = b = c = 1$ thì $(a^n + b^n + c^n)^2 = 3$ và $ab + bc + ca = 3$. Do đó $(a^n + b^n + c^n)^2 : (ab + bc + ca)$. Khi $a = 4, b = c = 1$ thì $a^n + b^n + c^n = 4^n + 2$ chia hết cho 3 nên $(a^n + b^n + c^n)^2 : 9$ và $ab + bc + ca = 4 + 4 + 1 = 9$. Do đó $(a^n + b^n + c^n)^2 : (ab + bc + ca)$. Vậy các bộ thoả mãn là $(1; 1; 1), (4; 1; 1), (1; 4; 1), (1; 1; 4)$.	0.5
	Khi $a = b = c = 1$ thì $(a^n + b^n + c^n)^2 = 3$ và $ab + bc + ca = 3$. Do đó $(a^n + b^n + c^n)^2 : (ab + bc + ca)$. Khi $a = 4, b = c = 1$ thì $a^n + b^n + c^n = 4^n + 2$ chia hết cho 3 nên $(a^n + b^n + c^n)^2 : 9$ và $ab + bc + ca = 4 + 4 + 1 = 9$. Do đó $(a^n + b^n + c^n)^2 : (ab + bc + ca)$. Vậy các bộ thoả mãn là $(1; 1; 1), (4; 1; 1), (1; 4; 1), (1; 1; 4)$.	0.5
Câu 4. (3.0 điểm)		
a	AD cắt BC tại D và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai E. $\Delta KBA \sim \Delta KMC$ ta được $KM.KA = KB.KC$ Kết quả quen thuộc $EI = EB = EC$.	0.75
	Gọi I_1 là giao điểm thứ hai của KI với đường tròn đường kính AI, I_2 là giao điểm thứ hai của KI với đường tròn (E; EI) Ta có $KM.KA = KI.KI_1$ và $KB.KC = KI.KI_2$. Lại có $KM.KA = KB.KC$ suy ra $KI.KI_1 = KI.KI_2 \Rightarrow KI_1 = KI_2$, do đó $I_1 \equiv I_2$ nên KI là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (AI) và (E). Vậy $KI \perp AI$.	0.75
	Ta có thể giải ý a) theo cách sau	

	 $\Delta MSB \sim \Delta MTC$ do đó $\frac{MB}{MC} = \frac{SB}{TC} = \frac{BG}{CG} \Rightarrow MG$ là phân giác góc $\widehat{BMC}$. Do đó MG đi qua E. Có $\widehat{KMI} = \widehat{KGI} = 90^\circ$ nên tứ giác $KMIG$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{MGK} = \widehat{MIK}$. Có $\widehat{MGK} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{MB} + \text{sđ}\widehat{EC}) = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{MB} + \text{sđ}\widehat{BE}) = \widehat{MAE}$. Suy ra $\widehat{MIK} = \widehat{MAE} \Rightarrow \widehat{KIA} = \widehat{KIM} + \widehat{MIA} = \widehat{MAI} + \widehat{MIA} = 90^\circ$. Do đó $KI \perp AE$.	
b	$\Delta KMB \sim \Delta KCA, \Delta KMC \sim \Delta KBA$ Suy ra $MB/CA = KB/KA$; $MC/BA = KC/KA$ Do đó $\frac{MC}{MB} \cdot \frac{KB}{KC} = \frac{AB}{AC}$	0.75
	$\Delta KBN \sim \Delta KEC, \Delta KCN \sim \Delta KEB$ Suy ra $KB/KE = BN/CE$; $KC/KE = CN/BE$. Do đó $\frac{KB}{KC} = \frac{BN}{CN}$ Từ đó ta có điều phải chứng minh	0.75
Câu 5. (1.0 điểm)		
	Ta thấy: Tồn tại một hàng hoặc cột có số camera ít nhất, với k camera. Có thể giả sử đó là hàng D. Khi đó hàng D có $8-k$ ô không có camera. Theo giả thiết, trên mỗi cột tương ứng có ít nhất $8-k$ camera. Tổng số camera trên các cột tương ứng với những ô trống này ít nhất $(8-k)^2$ camera. Các cột còn lại tương ứng với các ô có camera trên D có ít nhất k camera. Do đó tổng số camera trên các cột này ít nhất là k^2 camera.	0.75
	Vậy tổng số camera trong khu vực ít nhất là $(8-k)^2 + k^2 \geq \frac{8^2}{2} = 32$. Suy ra số ô không có camera nhiều nhất là 32. Một cách đặt tương ứng với số ô không có camera là 32 :	0.25



Trong hình trên ta đặt 32 camera vào ô đen và 32 ô trắng không có camera.