

(ĐỀ THI GỒM CÓ 01 TRANG)

Câu 1 (2,0 điểm). Cho biểu thức:

$$P = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{6\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}+2\sqrt{x}-3} \text{ với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 1.$$

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P .

Câu 2 (1,0 điểm). Cho đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn

$$(x+8)P(2x) = (8x-24)P(x+5), \text{ với mọi số thực } x.$$

a) Chứng minh -3 và 6 là hai nghiệm của $P(x)$.

b) Biết $P(x)$ là đa thức bậc ba và $P(0) = 72$. Tính $P(1)$.

Câu 3 (1,0 điểm). Cho tập hợp $X = \{1, 2, 3, 5, 8\}$ gồm 5 phần tử.

a) Bạn An lấy ngẫu nhiên hai số trong tập hợp X , mô tả không gian mẫu của phép thử trên.

b) Sau khi lấy ngẫu nhiên hai số từ tập hợp X , bạn An cộng hai số đó lại để được một số tự nhiên mới và điền kết quả vào chỗ trống trong phương trình $x^2 + 6x + \dots = 0$. Tính xác suất của biến cố “Phương trình tạo được vô nghiệm”.

Câu 4 (2,0 điểm).

a) Với mỗi số thực a , ta gọi phần nguyên của số a là số nguyên lớn nhất không vượt quá a . Tìm phần nguyên của số $M = \frac{3}{1.2} + \frac{7}{2.3} + \dots + \frac{2026^2 + 2026 + 1}{2026.2027}$.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố có dạng $P = n^n + 1$ với n là số tự nhiên và $P < 2^{165}$.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho dãy số $a_1, a_2, \dots, a_{4052}$ bao gồm các số từ 1 đến 2026, mỗi số xuất hiện đúng hai lần. Có thể sắp xếp các số hạng của dãy sao cho với mỗi số $n \in \{1, 2, \dots, 2026\}$, có đúng n số nằm giữa hai số n trong dãy hay không?

Câu 6 (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC (với $AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC, AH ; P là giao điểm khác A của AH và đường tròn (O) ; K là giao điểm của AD và EF .

a) Chứng minh năm điểm M, D, I, E, F cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $AK \cdot AP = AH \cdot AD$.

c) Tia OI cắt đường thẳng qua A và song song với BC tại S . Chứng minh S, K, M thẳng hàng.

HẾT

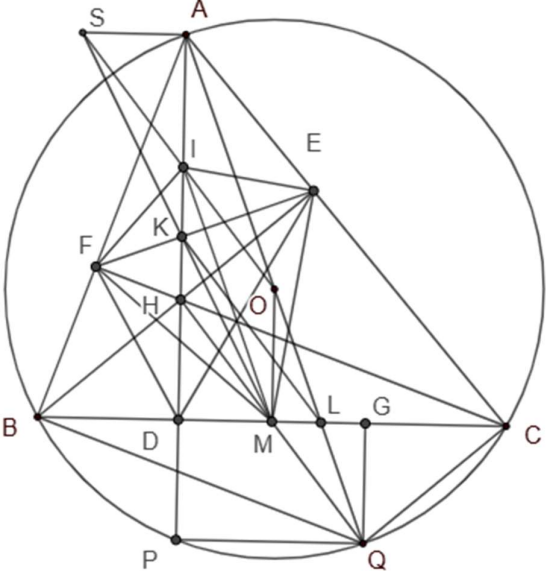
Họ tên thí sinh Số báo danh

HƯỚNG DẪN CHẤM
(Bản Hướng dẫn chấm gồm có 05 trang).

Câu	Đáp án	Điểm
1	Cho biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{6\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}+2\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.	2,0
	a) Rút gọn biểu thức P .	
	Ta có $P = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+3} + \frac{2(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} - \frac{6\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+3)}$ $= \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+3} + \frac{2}{\sqrt{x}-1} - \frac{6\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+3)}$	0,5
	$= \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1) + 2(x+\sqrt{x}+3) - (6\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+3)}$ $= \frac{x+\sqrt{x}-2+2x+2\sqrt{x}+6-6\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+3)}$ $= \frac{3x-3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+3)} = \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+3)} = \frac{3\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+3}.$	0,5
	b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P .	
	Trường hợp $x=0$ thì $P=0$.	0,25
	Trường hợp $x>0$: Chia cả tử và mẫu cho $\sqrt{x}$, ta được: $P = \frac{3}{\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}}} = \frac{3}{\sqrt{x}+1+\frac{3}{\sqrt{x}}} = \frac{3}{\left(\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)+1}.$	0,25
	Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $\sqrt{x}$ và $\frac{3}{\sqrt{x}}$, ta có $\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{3}{\sqrt{x}}} = 2\sqrt{3}.$ Suy ra $\left(\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)+1 \geq 2\sqrt{3}+1.$	0,25
	Khi đó $P \leq \frac{3}{2\sqrt{3}+1} = \frac{6\sqrt{3}-3}{11}.$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x} = \frac{3}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x=3$ (thỏa mãn điều kiện xác định) Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{6\sqrt{3}-3}{11}$ khi $x=3$.	0,25
	Cho đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn $(x+8)P(2x) = (8x-24)P(x+5)$, (*) với mọi số thực x .	1,0
	a) Chứng minh -3 và 6 là hai nghiệm của $P(x)$.	
	Thay $x=3$ vào (*), ta được:	

2	$(3+8)P(6) = (8.3-24)P(8)$ hay $11.P(6) = 0$ hay $P(6) = 0$. Vậy $x = 6$ là một nghiệm của $P(x)$. Thay $x = -8$ vào (*), ta được: $(-8+8)P(-16) = (8.(-8)-24)P(-3)$. Từ đó $0 = -88.P(-3)$ hay $P(-3) = 0$. Vậy $x = -3$ là một nghiệm của $P(x)$.	0,5
	b) Biết $P(x)$ là đa thức bậc ba và $P(0) = 72$. Tính $P(1)$.	
	Thay $x = 1$ vào (*), ta được: $(1+8)P(2) = (8.1-24)P(6).$ Vì $P(6) = 0$, nên $9.P(2) = -16.0 \Rightarrow P(2) = 0$. Vậy $x = 2$ là một nghiệm của $P(x)$.	0,25
	Vì $P(x)$ có ít nhất ba nghiệm là $x_1 = 6, x_2 = -3, x_3 = 2$ và $P(x)$ có bậc 3 nên $P(x)$ có dạng: $P(x) = a(x-6)(x+3)(x-2).$ Lại có $P(0) = a(0-6)(0+3)(0-2) = 72$ nên $a = 2$. Thử lại với $P(x) = 2(x-6)(x+3)(x-2)$ vào (*) thấy không thỏa mãn. Do đó không tồn tại đa thức bậc ba như giả thiết. Do đó không có giá trị $P(1)$.	0,25
3	Cho tập hợp $X = \{1, 2, 3, 5, 8\}$ gồm 5 phần tử.	1,0
	a) Bạn An lấy ngẫu nhiên hai số trong tập hợp X , mô tả không gian mẫu của phép thử trên.	
	Phép thử là lấy ngẫu nhiên hai số từ tập hợp $X = \{1, 2, 3, 5, 8\}$. Do đó không gian mẫu là $\Omega = \{(1; 2), (1; 3), (1; 5), (1; 8), (2; 3), (2; 5), (2; 8), (3; 5), (3; 8), (5; 8)\}.$ Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = 10$.	0,25
	b) Sau khi lấy ngẫu nhiên hai số từ tập hợp X , bạn An cộng hai số đó lại để được một số tự nhiên mới và điền kết quả vào chỗ trống trong phương trình $x^2 + 6x + \dots = 0$. Tính xác suất của biến cố "Phương trình tạo được vô nghiệm".	
	Gọi số tự nhiên mới thu được sau khi cộng hai số là c . Phương trình trở thành: $x^2 + 6x + c = 0$ Phương trình bậc hai trên vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' < 0$. Ta có $\Delta' = 3^2 - 1 \cdot c = 9 - c < 0 \text{ nên } c > 9. $	0,25
	Lập bảng tổng các cặp hai số từ không gian mẫu Ω để tìm các giá trị của c ta thu được các kết quả thuận lợi cho biến cố A : "Phương trình tạo được vô nghiệm" là: $A = \{(2; 8), (3; 8), (5; 8)\}.$ Xác suất của biến cố A là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{10} = 0,3. $	0,5
4	a) Với mỗi số thực a , ta gọi phần nguyên của số a là số nguyên lớn nhất không vượt quá a . Tìm phần nguyên của số $M = \frac{3}{1.2} + \frac{7}{2.3} + \dots + \frac{2026^2 + 2026 + 1}{2026.2027}. $	1,0
	Xét số u_k với $k \in \{1, 2, \dots, 2026\}$: $u_k = \frac{k^2 + k + 1}{k(k+1)} = \frac{k(k+1) + 1}{k(k+1)} = \frac{k(k+1)}{k(k+1)} + \frac{1}{k(k+1)} = 1 + \frac{1}{k(k+1)} = 1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}. $	0,25
	Do đó $M = \left(1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{2026} - \frac{1}{2027}\right)$ $= \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{2026} + \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2026} - \frac{1}{2027}\right)\right]$ $= 2026 + \left(1 - \frac{1}{2027}\right) = 2026 + \frac{2026}{2027}. $	0,25

	Vì $0 < \frac{2026}{2027} < 1$, nên $2026 < 2026 + \frac{2026}{2027} < 2027$. Hay $2026 < M < 2027$.	0,25
	Số nguyên lớn nhất không vượt quá M là 2026 hay phần nguyên của M là 2026.	0,25
	b) Tìm tất cả các số nguyên tố có dạng $P = n^n + 1$ với n là số tự nhiên và $P < 2^{165}$.	1,0
	Nếu $n = 1$, ta có $P = 1^1 + 1 = 2$. Vì 2 là số nguyên tố và $2 < 2^{165}$, nên $n = 1$ thỏa mãn. Nếu n là số lẻ lớn hơn 1 ($n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}^*$): $n^n + 1 = (n + 1)(n^{n-1} - n^{n-2} + \dots + 1)$ Vì $n > 1$ nên $n + 1 > 2$, dẫn đến $n^n + 1$ là hợp số. Vậy để P là số nguyên tố, n phải là số chẵn.	0,25
4	Đặt $n = 2^k \cdot m$ với m là số lẻ. Nếu $m > 1$, tương tự lập luận trên: $n^n + 1 = (n^{2^k})^m + 1$ chia hết cho $n^{2^k} + 1$. Để P là số nguyên tố, ta phải có $m = 1$. Khi đó n có dạng lũy thừa của 2 nên $n = 2^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$). Ta có $P = n^n + 1 = (2^k)^{(2^k)} + 1 = 2^{k \cdot 2^k} + 1$.	0,25
	$P < 2^{165}$ nên $2^{k \cdot 2^k} < 2^{165}$ hay $k \cdot 2^k < 165$. Từ đó ta thu được $k \in \{2; 3; 4; 5\}$ Với $k = 1$ ta có $P = 2^2 + 1 = 5$ là số nguyên tố. Với $k = 2$ ta có $P = 4^4 + 1 = 257$ là số nguyên tố.	0,25
	Với $k = 3$ ta có $P = 8^8 + 1 = 2^{24} + 1$. Ta có $2^{24} + 1 = (2^8)^3 + 1$ chia hết cho $2^8 + 1 = 257$ nên $P = 8^8 + 1$ không là số nguyên tố. Với $k = 4$ ta có $P = 16^{16} + 1 = 2^{64} + 1 = 2^{2^6} + 1$. Đây là số Fermat F_6 và là hợp số (chia hết cho 274177) nên $P = 16^{16} + 1$ không là số nguyên tố. Với $k = 5$ ta có $P = 32^{32} + 1 = 2^{160} + 1$. Vì $2^{160} + 1 = (2^{32})^5 + 1$ chia hết cho $2^{32} + 1$ nên $P = 32^{32} + 1$ không là số nguyên tố. Vậy các số nguyên tố thỏa mãn điều kiện đề bài là: 2, 5, 257.	0,25
	Cho dãy số $a_1, a_2, \dots, a_{4052}$ bao gồm các số từ 1 đến 2026, mỗi số xuất hiện đúng hai lần. Có thể sắp xếp các số hạng của dãy sao cho với mỗi số $n \in \{1, 2, \dots, 2026\}$, có đúng n số nằm giữa hai số n trong dãy hay không?	1,0
5	Ta đánh số các vị trí từ 1 đến 4052 và tô màu xen kẽ: ô màu đen (vị trí lẻ), ô màu trắng (vị trí chẵn). Tổng cộng có 4052 vị trí, nên có 2026 ô màu đen và 2026 ô màu trắng. Giả sử cặp số n nằm ở hai vị trí p và q. Khoảng cách giữa chúng là n số, nghĩa là: $ p - q = n + 1.$	0,25
	Nếu n là số lẻ: Khoảng cách $p - q$ là số chẵn. Hai vị trí p, q sẽ luôn cùng màu. (Ví dụ: vị trí 1 và 3 cùng màu đen). Nếu n là số chẵn: Khoảng cách $p - q$ là số lẻ. Hai vị trí p, q sẽ luôn khác màu. (Ví dụ: vị trí 1 và 4 khác màu). Trong các số từ 1 đến 2026 ta thấy : Số lượng các số chẵn là $2026 : 2 = 1013$ số. Số lượng các số lẻ là $2026 : 2 = 1013$ số. Mỗi số chẵn chiếm 1 ô màu đen và 1 ô màu trắng.	0,25

6	Vậy 1013 số chẵn sẽ chiếm tổng cộng 1013 ô màu đen và 1013 ô màu trắng.	
	Sau khi các số chẵn đã chiếm chỗ, số ô còn lại cho các số lẻ là: Ô màu đen còn lại: $2026 - 1013 = 1013$ ô. Ô màu trắng còn lại: $2026 - 1013 = 1013$ ô.	0,25
	Theo lập luận bên trên, mỗi số lẻ bắt buộc phải chiếm 2 ô cùng màu (hoặc 2 ô màu đen, hoặc 2 ô màu trắng). Điều này kéo theo tổng số ô màu đen (và trắng) mà các số lẻ chiếm chỗ phải là một số chẵn. Tuy nhiên, ta đã có số ô còn lại cho các số lẻ ở mỗi màu là 1013, đây là một số lẻ. Do đó, không tồn tại cách sắp xếp thỏa mãn yêu cầu đề bài.	0,25
	Cho tam giác nhọn ABC (với $AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC, AH ; P là giao điểm khác A của AH và đường tròn (O) ; K là giao điểm của AD và EF .	3,0
	a) Chứng minh năm điểm M, D, I, E, F cùng thuộc một đường tròn.	
		
Ta có $\widehat{IEM} = \widehat{IEH} + \widehat{HEM} = \widehat{IHE} + \widehat{EBM} = \widehat{BHD} + \widehat{EBD} = 90^\circ$ nên tam giác IEM vuông tại E , do đó ba điểm I, E, M thuộc đường tròn đường kính IM .		0,5
Bằng cách chứng minh tương tự ta cũng có $\widehat{IFM} = 90^\circ$ nên ba điểm I, F, M cũng thuộc đường tròn đường kính IM . Vậy bốn điểm I, F, M, E cùng thuộc đường tròn đường kính IM .		
Lại có $\widehat{IDM} = 90^\circ$ nên D cũng thuộc đường tròn đường kính IM . Vậy năm điểm M, D, F, I, E cùng thuộc đường tròn đường kính IM .		0,25
b) Chứng minh $AK \cdot AP = AH \cdot AD$.		
Gọi Q đối xứng với A qua O , ta chứng minh được $BHCQ$ là hình bình hành nên M là trung điểm của HQ . Lại có $DM \parallel PQ$ nên D là trung điểm của HP . Ngoài ra $QH \parallel OI$.		0,25
Gọi L là giao của AQ và BC , theo định lý Thales ta có $\frac{AD}{AP} = \frac{AL}{AQ}$ (1). Ta có $\widehat{BAP} = 90^\circ - \widehat{ABC} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{AOC}) = \widehat{OAC}$. Mà $\widehat{AFK} = \widehat{ACB}$ (do tứ giác $BFEC$ nội tiếp, chứng minh dễ dàng) nên hai tam giác AFK và ACL đồng dạng, hai tam giác AFH và ACQ đồng dạng.		0,5

	Từ đó $\frac{AK}{AL} = \frac{AF}{AC} = \frac{AH}{AQ}$, suy ra $\frac{AL}{AQ} = \frac{AK}{AH}$ (2) Từ (1) và (2) ta có $\frac{AD}{AP} = \frac{AK}{AH}$ hay $AD.AH = AP.AK$.	0,5
	c) Tia OI cắt đường thẳng qua A và song song với BC tại S . Chứng minh S, K, M thẳng hàng.	
	Ta có $\widehat{SAI} = \widehat{HPQ} = 90^0$ và $\widehat{SIA} = \widehat{PIO} = \widehat{PHQ}$ nên hai tam giác SIA và QHP đồng dạng. Do đó $\frac{SI}{HQ} = \frac{IA}{HP}$ suy ra $\frac{SI}{2HM} = \frac{IA}{2DP}$.	0,25
	Theo (2) ta có $KL // QH$ mà $QH // OI$ nên suy ra $KL // QH // OI$. Gọi G là hình chiếu của Q trên BC thì do $BPQC$ là hình thang nên $DPQG$ là hình chữ nhật, ta có : $\frac{SI}{HM} = \frac{OM}{DP} = \frac{OM}{QG} = \frac{OL}{QL} = \frac{KI}{KH}$ (do $OIHQ$ là hình thang và $KL // OI$).	0,5
	Xét hai tam giác SIK và MHK có $\widehat{SIK} = \widehat{MHK}$ (do $OI // HM$) và $\frac{SI}{HM} = \frac{KI}{KH}$ nên hai tam giác này đồng dạng. Từ đó suy ra $\widehat{IKS} = \widehat{HKM}$. Suy ra S, K, M thẳng hàng.	0,25
	Điểm toàn bài	10

HẾT