

Môn thi: **TOÁN (chuyên)**
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu I (2,0 điểm)

1) Bạn An gieo một con xúc xắc cân đối, đồng chất và ghi lại số lần xuất hiện các mặt của con xúc xắc. An đem xóa số lần xuất hiện mặt 3 chấm và mặt 4 chấm (như bảng).

Mặt	1	2	3	4	5	6
Số lần xuất hiện	3	2			3	2

An nói với Bình rằng “Đố bạn điền được đúng số vào hai chỗ trống tờ đã xóa. Biết rằng, xác suất thực nghiệm của biến cố ‘xúc xắc ra mặt lẻ’ bằng $\frac{3}{5}$ và tổng số lần gieo xúc xắc của tờ lớn hơn 10 và bé hơn 20”. Bạn hãy giúp bạn Bình điền số vào chỗ trống?

2) Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} - \frac{5}{c} = 0$. Chứng minh

$$2a^2 + 3b^2 = 4c^2.$$

Câu II (2,0 điểm)

1) Cho p, q là hai số nguyên tố sao cho $p > q > 3$ và $p - q = 2$. Chứng minh tổng $p + q$ chia hết cho 12.

2) Tìm tất cả cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $(x - y)(2x + y + 1) + 9(y - 1) = 13$.

Câu III (2,0 điểm)

1) Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn a, b nguyên tố cùng nhau và $ab + c^2$ chia hết cho ac . Chứng minh a là một số chính phương.

2) Với các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a}{2(a^2 + 1) + bc} + \frac{b}{2(b^2 + 1) + ca} + \frac{c}{2(c^2 + 1) + ab}$.

Câu IV (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) và nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi các điểm M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB và đoạn thẳng AC . Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A cắt các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại các điểm B, C lần lượt tại D và E .

1) Chứng minh các đường thẳng MN, BE và CD cùng đi qua một điểm.

2) Gọi G là giao điểm của BE và AC . Chứng minh $\frac{GA}{GC} = \frac{BA^2}{BC^2}$.

3) Gọi K là giao điểm của AB và CD , trung điểm của các đoạn thẳng BG, CK lần lượt là X và Y . Chứng minh $\widehat{XCB} = \widehat{YBC}$.

Câu V (1,0 điểm)

Có thể chia được tập hợp gồm 1975 số nguyên dương đầu tiên thành 5 tập hợp rời nhau sao cho mỗi nhóm có cùng số phần tử và có tổng của các phần tử bằng nhau hay không? Vì sao?

-----HẾT-----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Họ tên và chữ ký của cán bộ coi thi số 1:

Họ tên và chữ ký của cán bộ coi thi số 2:

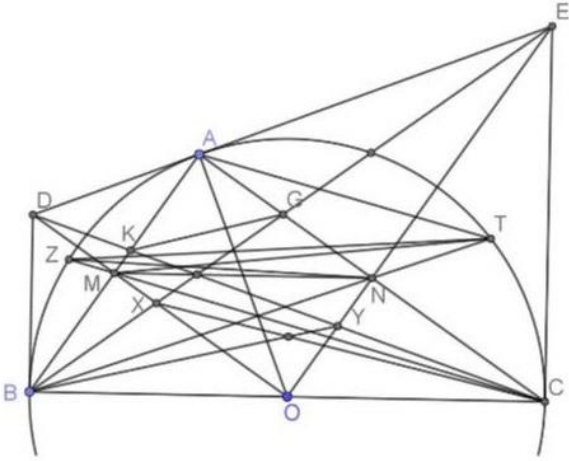
HƯỚNG DẪN CHẤM

- +) Điểm toàn bài để lẻ đến 0,25.
+) Các cách làm khác nếu đúng vẫn cho điểm tương ứng với biểu điểm của hướng dẫn chấm.
+) Các tình huống phát sinh trong quá trình chấm do Hội đồng chấm thi quy định, thống nhất bằng biên bản.

Câu	Ý	Đáp án	Điểm
Câu I 2,0 điểm	1)	Hãy giúp bạn Bình điền vào chỗ trống?	1,0
		Gọi số lần xuất hiện mặt 3 chấm và 4 chấm lần lượt là $x, y (x, y \in \mathbb{N})$.	0,25
		Ta có $0 < x + y < 10$	
		Số lần xuất hiện mặt lẻ là $x + 3 + 3 = x + 6$. Tổng số lần gieo xúc xắc là $x + y + 10$.	0,25
		Xác suất thực nghiệm biến cố xúc xắc ra mặt lẻ là $\frac{x+6}{x+y+10} = \frac{3}{5}$	0,25
		$\Leftrightarrow 5x + 30 = 3x + 3y + 30 \Leftrightarrow 2x = 3y$.	
		Do $x, y \in \mathbb{N}$ và $(2; 3) = 1$ nên $x : 3, y : 2$ mà $0 < x + y < 10$ nên $x = 3, y = 2$.	0,25
	2)	Chứng minh $2a^2 + 3b^2 = 4c^2$.	1,0
		Vì $a + b + c = 0$ nên: $(a + b + c)(2a + 3b - 4c) = 0$	0,25
		Suy ra $(2a^2 + 3b^2 - 4c^2) + 5ab - 2ac - bc = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow (2a^2 + 3b^2 - 4c^2) + abc \left(\frac{5}{c} - \frac{2}{b} - \frac{1}{a} \right) = 0$	0,25
		Suy ra $2a^2 + 3b^2 = 4c^2$.	0,25
Câu II 2,0 điểm	1)	Chứng minh tổng $p + q$ chia hết cho 12.	1,0
		Ta chứng minh $p + q : 3$. Do q là số nguyên tố nên ta xét	
		TH1: $q = 3k + 1 (k \in \mathbb{N}^*)$ khi đó $p = 3k + 3 > 3 \Rightarrow p : 3$ mâu thuẫn với p nguyên tố.	0,25
		TH2: $q = 3k + 2 (k \in \mathbb{N}^*)$ khi đó $p = 3k + 4 \Rightarrow p + q = 6k + 6 : 3$. Vậy $p + q : 3$. (1)	0,25
		Chứng minh $p + q : 4$. Do q là số nguyên tố nên ta xét	
		TH1: $q = 4k + 1 (k \in \mathbb{N}^*)$ khi đó $p = 4k + 3 \Rightarrow p + q = 4k + 4 : 4$.	0,25
		TH2: $q = 4k + 3 (k \in \mathbb{N}^*)$ khi đó $p = 4k + 5 \Rightarrow p + q = 4k + 8 : 4$. Vậy $p + q : 4$. (2)	0,25
		Từ (1) và (2) ta có $p + q : 12$.	
	2)	Tìm tất cả cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $(x - y)(2x + y + 1) + 9(y - 1) = 13$	1,0
		Biến đổi phương trình $(x - y)(2x + y + 1) + 9(y - 1) = 13$	
		$\Leftrightarrow 2x^2 + xy - 2xy + x - y^2 - y + 9y - 9 = 13$	0,25
		$\Leftrightarrow (2x^2 + xy - 5x) - (2xy + y^2 - 5y) + (6x + 3y - 15) = 7$	
		$\Leftrightarrow x(2x + y - 5) - y(2x + y - 5) + 3(2x + y - 5) = 7 \Leftrightarrow (2x + y - 5)(x - y + 3) = 7$	0,25

Câu III 2,0 điểm		Ta có các trường hợp sau	
		+) $\begin{cases} 2x+y-5=1 \\ x-y+3=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=6 \\ x-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{10}{3} \\ y=\frac{-2}{3} \end{cases}$ (Loại)	0,25
		+) $\begin{cases} 2x+y-5=7 \\ x-y+3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=12 \\ x-y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{10}{3} \\ y=\frac{16}{3} \end{cases}$ (Loại)	
		+) $\begin{cases} 2x+y-5=-1 \\ x-y+3=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=4 \\ x-y=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=8 \end{cases}$ (Nhận)	0,25
		+) $\begin{cases} 2x+y-5=-7 \\ x-y+3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=-2 \\ x-y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$ (Nhận)	
		Vậy cặp (x, y) nguyên cần tìm là $(-2, 8); (-2, 2)$.	
		Chứng minh a là một số chính phương.	1,0
		Đặt $d = UCLN(a, c)$; khi đó, tồn tại các số nguyên m, n nguyên tố cùng nhau, sao cho $a = dm, c = dn$. (1)	0,25
		Ta có $(ab + c^2) : ac \Rightarrow (ab + c^2) : a \Rightarrow c^2 : a$. (2)	
		1) Từ (1) và (2), ta có $d^2 n^2 : dm \Rightarrow dn^2 : m$. Mà $(m, n) = 1$ nên $d : m$. (3)	0,25
		Mặt khác từ (1) ta có $ac = d^2 mn$ do đó ta lại có $ac : d^2$.	0,25
		Vì thế từ $(ab + c^2) : d^2 \Rightarrow (dmb + d^2 n^2) : d^2 \Rightarrow dmb : d^2 \Rightarrow mb : d$	
		Mà $(a, b) = 1 \Rightarrow (b, d) = 1 \Rightarrow m : d$. (4)	0,25
		Từ (3) và (4) ta có $m = d \Rightarrow a = d^2$ hay a là số chính phương.	
		Tìm GTNN và GTLN của $P = \frac{a}{2(a^2+1)+bc} + \frac{b}{2(b^2+1)+ca} + \frac{c}{2(c^2+1)+ab}$.	1,0
		Ta có: $2(a^2+1)+bc = 2\left(a^2 + \frac{bc}{2}\right) + 2 \leq 2(a+b+c)^2 + 2 = 20$.	0,25
		Dẫn tới $\frac{a}{2(a^2+1)+bc} \geq \frac{a}{20}$, từ đó $P \geq \frac{a+b+c}{20} = \frac{3}{20}$.	0,25
		Dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi $a = 3; b = c = 0$.	
	2)	Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$. Ta có $a^2 + 1 \geq 2a, b^2 + 1 \geq 2b, c^2 + 1 \geq 2c$. Xét các trường hợp sau:	
		TH1: Có $b = c = 0$ khi đó $P = \frac{3}{20}$. (1)	0,25
		TH2: $c = 0, b > 0 \Rightarrow P = \frac{a}{2(a^2+1)} + \frac{b}{2(b^2+1)} \leq \frac{a}{4a} + \frac{b}{4b} = \frac{1}{2}$. (2)	
		TH3: Với $c > 0 \Rightarrow a, b > 0$ khi đó ta có $P \leq \frac{a}{4a+bc} + \frac{b}{4b+ca} + \frac{c}{4c+ab}$.	0,25

		Suy ra $4P \leq \frac{4a}{4a+bc} + \frac{4b}{4b+ca} + \frac{4c}{4c+ab} = 3 - \underbrace{\left(\frac{bc}{4a+bc} + \frac{ca}{4b+ca} + \frac{ab}{4c+ab} \right)}_Q$ $Q \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{12abc + (bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2} \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{(ab+bc+ca)^2 + 2abc(a+b+c)}$ $\geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{(ab+bc+ca)^2 + \frac{2}{3}(ab+bc+ca)^2} = \frac{3}{5} \Rightarrow 4P \leq 3 - \frac{3}{5} = \frac{12}{5} \Rightarrow P \leq \frac{3}{5}.$ ⁽³⁾ Từ (1) (2) và (3) ta có $P \leq \frac{3}{5}$, dấu '=' xảy ra khi $a = b = c = 1$.	
Câu IV 3,0 điểm		Chứng minh các đường thẳng MN, BE và CD cùng đi qua một điểm.	1,0
	1)		
		Gọi $\{F\} \equiv CD \cap BE, \{H\} \equiv AF \cap BC$. Ta đi chứng minh MN đi qua F. Chỉ ra $DB = DA, EA = EC$.	0,25
		Ta có $BD // CE \Rightarrow \frac{BD}{CE} = \frac{DF}{FC}$ (ta lét). Mà $\frac{BD}{CE} = \frac{DA}{AE} \Rightarrow \frac{DF}{FC} = \frac{DA}{AE}$ Xét tam giác DCE có $\frac{DF}{FC} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AF // CE$.	0,25
		Vậy ta có $AH // CE$ theo ta lét ta có $\frac{AF}{CE} = \frac{DF}{DC} = \frac{BF}{BE} = \frac{FH}{CE} \Rightarrow AF = FH$.	0,25
		Chỉ ra $MF // BC; MN // BC$ từ đó ta có M, F, N thẳng hàng. Từ đó ta có đpcm.	0,25
		Chứng minh $\frac{GA}{GC} = \frac{BA^2}{BC^2}$.	1,0
	2)		

	Vậy $\frac{AG}{NP} = \frac{GL}{AN} \left(= \frac{BG}{BN} \right) \Rightarrow \frac{GA}{GL} = \frac{NP}{AN} = \frac{NP \cdot BC}{AN \cdot AB} \cdot \frac{AB}{BC} = \frac{2S_{BNC}}{2S_{ANB}} \cdot \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{BC} \cdot (1)$ Chỉ ra $\triangle CLG \sim \triangle CAB \Rightarrow \frac{GL}{GC} = \frac{AB}{BC} \cdot (2)$ Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{GA}{GL} \cdot \frac{GL}{GC} = \frac{AB^2}{BC^2} \Rightarrow \frac{GA}{GC} = \frac{AB^2}{BC^2}$	0,25
	Chỉ ra $\triangle CLG \sim \triangle CAB \Rightarrow \frac{GL}{GC} = \frac{AB}{BC} \cdot (2)$ Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{GA}{GL} \cdot \frac{GL}{GC} = \frac{AB^2}{BC^2} \Rightarrow \frac{GA}{GC} = \frac{AB^2}{BC^2}$	0,25
	Chứng minh $\widehat{XCB} = \widehat{YBC}$.	1,0
3)	 Gọi Z, T lần lượt là giao điểm thứ hai của các đường thẳng CM, BN với (O). Theo ý b) ta chứng minh được $\widehat{ABG} = \widehat{CBN} \Rightarrow \widehat{ABN} = \widehat{CBG}$. Chỉ ra $\triangle ABT \sim \triangle GBC$ từ đó chỉ ra $\triangle BMT \sim \triangle BXC \Rightarrow \widehat{MTB} = \widehat{XCB} \cdot (3)$ Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $\widehat{NZC} = \widehat{YBC} \cdot (4)$ Mặt khác $MN \parallel BC \Rightarrow \widehat{NMC} = \widehat{MCB}$ mà $\widehat{MCB} = \widehat{BTZ} = \widehat{NTZ} \Rightarrow \widehat{NTZ} = \widehat{NMC}$ Vậy tứ giác $ZTNM$ có $\widehat{NTZ} = \widehat{NMC} \Rightarrow ZTNM$ nội tiếp dẫn tới $\widehat{MTN} = \widehat{MZN} \cdot (5)$ Từ (3) (4) và (5) ta có điều phải chứng minh.	0,5
	Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $\widehat{NZC} = \widehat{YBC} \cdot (4)$ Mặt khác $MN \parallel BC \Rightarrow \widehat{NMC} = \widehat{MCB}$ mà $\widehat{MCB} = \widehat{BTZ} = \widehat{NTZ} \Rightarrow \widehat{NTZ} = \widehat{NMC}$	0,25
	Vậy tứ giác $ZTNM$ có $\widehat{NTZ} = \widehat{NMC} \Rightarrow ZTNM$ nội tiếp dẫn tới $\widehat{MTN} = \widehat{MZN} \cdot (5)$ Từ (3) (4) và (5) ta có điều phải chứng minh.	0,25
	Có thể chia được tập hợp gồm 1975 nguyên dương đầu tiên...	0,25
	Ta sẽ chứng minh bài toán tổng quát: Chia $5n$ với $n > 1$ số tự nhiên đầu tiên thành 5 tập hợp rời nhau sao cho mỗi nhóm có đúng n phần tử và tổng của chúng bằng nhau bằng phương pháp quy nạp. Với $n = 2$ ta chia 5 tập hợp là $\{1; 10\}, \{2; 9\}, \{3; 8\}, \{4; 7\}, \{5; 6\}$ Với $n = 3$ ta chia 5 tập hợp là $\{1; 9; 14\}, \{2; 10; 12\}, \{3; 8; 13\}, \{4; 5; 15\}, \{6; 7; 11\}$.	0,25
	Giả sử n đã đúng tới $n = k$ ta sẽ chứng minh $n = k + 2$ cũng đúng. Thật vậy $n = k$ ta chia được 5 tập rời nhau thỏa mãn đầu bài.	0,25
	Ta sẽ tiến hành bổ sung mỗi tập rời nhau của trường hợp $n = k$ các bộ phận tử như sau: $\{5k + 1; 5k + 10\}, \{5k + 2; 5k + 9\}, \{5k + 3; 5k + 8\}, \{5k + 4; 5k + 7\}, \{5k + 5; 5k + 6\}$	0,25
	Khi đó ta sẽ được 5 tập rời nhau mới thỏa mãn mỗi tập có đúng $k + 2$ phần tử và có tổng bằng nhau. Từ đó ta có giả thiết quy nạp đã được chứng minh. Mà $1975:5$ nên ta có thể khẳng định là có thể chia tập hợp 1975 số nguyên dương đầu tiên thỏa mãn ycbt.	0,25
Câu V 1,0 điểm		

.....²HET.....

Bài I. (2,0 điểm)

- 1) Có hai túi I và II, mỗi túi chứa 4 tấm thẻ được đánh số lần lượt là 1, 2, 3, 4. Rút ngẫu nhiên từ mỗi túi ra một tấm thẻ và nhân hai số ghi trên tấm thẻ với nhau. Tính xác suất để kết quả nhận được là số lẻ.
- 2) Cho a, b, c là ba số khác 0 và thỏa mãn $a + b + c = 0$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}.$$

Bài II. (2,0 điểm)

- 1) Tìm tất cả các số nguyên dương x và y thỏa mãn $x^2 - x = y^2 - 2$.
- 2) Tìm số nguyên tố p biết rằng $p + 2$ và $p + 10$ cũng là các số nguyên tố.

Bài III. (2,0 điểm)

- 1) Với a, b và c là các số nguyên dương thỏa mãn $a + b + c = 10$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = abc$.
- 2) Cho a, b, c là 3 số nguyên. Chứng minh rằng $P = (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$ chia hết cho 6.

Bài IV. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A . Đường tròn tâm O đường kính AB cắt các đoạn BC và OC lần lượt là D và I . Gọi H là hình chiếu của A lên OC , AH cắt BC tại M

1. Chứng minh rằng tứ giác $ACDH$ nội tiếp và $\widehat{CHD} = \widehat{ABC}$.
2. Chứng minh rằng hai tam giác OHB và OBC đồng dạng với nhau và HM là tia phân giác của góc BHD .
3. Gọi K là trung điểm của BD . Chứng minh rằng $MD \cdot BC = MB \cdot CD$ và $MB \cdot MD = MK \cdot MC$.

Bài V. (1,0 điểm)

Với S là một tập con của tập $\mathbb{N}^*$, ta quy ước tập S được gọi là "CST" nếu tồn tại hai số a và b phân biệt trong S sao cho a là ước của b . Ví dụ $S = \{2; 3; 4\}$ là CST vì 2, 4 là hai số phân biệt trong S và 2 là ước của 4.

1. Chứng minh rằng có một tập con 4 phần tử của tập $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ không là CST.
2. Cho tập hợp S gồm $n + 1$ số nguyên dương phân biệt $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$, mỗi số đều không vượt quá $2n$ (với $n \geq 2$). Chứng minh rằng tập hợp S là CST.

————— **HẾT** —————

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

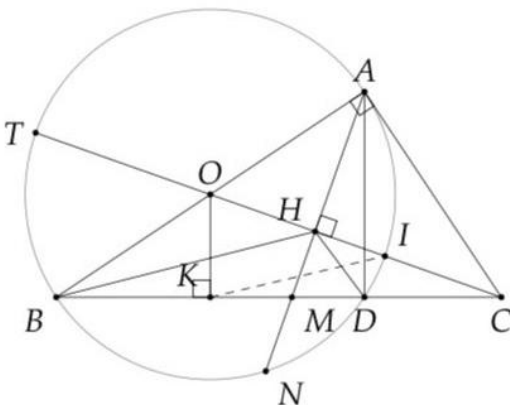
Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Họ và tên của cán bộ coi thi: Chữ ký của cán bộ coi thi:

HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài	Đáp án	Điểm
I (2,0 điểm)	1) (1,0 điểm) Tính xác suất để kết quả nhận được là số lẻ. Không gian mẫu là $\Omega = \{(1;1), (1;2), (1;3), (1;4), (2;1), (2;2), (2;3), (2;4), (3;1), (3;2), (3;3), (3;4), (4;1), (4;2), (4;3), (4;4)\}$. Số phần tử của Ω là $n(\Omega) = 16$.	0,5
	Gọi A là biến cố "Tích 2 số ghi trên hai tấm thẻ rút được là một số lẻ". Ta có $A = \{(1;1), (1;3), (3;1), (3;3)\}$, do đó $n(A) = 4$.	0,25
	Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.	0,25
	2) (1,0 điểm) Tính giá trị của biểu thức P .	
	Dựa vào giả thiết ta có $b^2 + c^2 - a^2 = b^2 + c^2 - (b + c)^2 = -2bc.$ Tương tự ta có $c^2 + a^2 - b^2 = -2ca$ và $a^2 + b^2 - c^2 = -2ab$.	0,5
	Do đó $P = \frac{-1}{2bc} + \frac{-1}{2ca} + \frac{-1}{2ab} = -\frac{a+b+c}{2abc} = 0.$ Vậy $P = 0$.	0,5
II (2,0 điểm)	1) (1,0 điểm) Tìm tất cả các số nguyên dương x và y thỏa mãn $x^2 - x = y^2 - 2$. $x^2 - x = y^2 - 2 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 - 4y^2 = -7$ $\Leftrightarrow (2x - 2y - 1)(2x + 2y - 1) = -7$.	0,25
	Do $2x + 2y - 1 > 2x - 2y - 1$ nên $\begin{cases} 2x - 2y - 1 = -1 \\ 2x + 2y - 1 = 7 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 2x - 2y - 1 = -7 \\ 2x + 2y - 1 = 1 \end{cases}.$	0,5
	Do đó tìm được $(x; y) = (2; 2)$ (trường hợp $(x; y) = (-1; 2)$ bị loại). Vậy $x = y = 2$ là các số cần tìm.	0,25
	2) (1,0 điểm) Tìm số nguyên tố p biết rằng $p + 2$ và $p + 10$ cũng là các số nguyên tố.	
	Nếu $p = 3$ thì $p + 2 = 5$ và $p + 10 = 13$ là các số nguyên tố, nên $p = 3$ là một giá trị cần tìm.	0,25
	Nếu $p \neq 3$ thì $p + 2 > 3$ và $p + 10 > 3$, do p là số nguyên tố nên p chia 3 dư 1 hoặc dư 2.	0,25
	Khi p chia 3 dư 1 thì $p + 2$ chia hết cho 3 nên $p + 2$ không là số nguyên tố. Khi p chia 3 dư 2 thì $p + 10$ chia hết cho 3 nên $p + 10$ không là số nguyên tố. Vậy $p = 3$ là giá trị duy nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán.	0,5
III	1) (1,0 điểm) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = abc$.	

Bài	Đáp án	Điểm
(2,0 điểm)	Không mất tính tổng quát ta giả sử $1 \leq a \leq b \leq c \leq 8$. Tìm giá trị lớn nhất. Do $a + b + c = 10$ nên $c \geq 4$. Áp dụng bất đẳng thức $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ với mọi số thực x, y ta được $(4a \cdot 4b)(3c \cdot 12) \leq \left(\frac{4a+4b}{2}\right)^2 \left(\frac{3c+12}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{16} \left(\frac{4a+4b+3c+12}{2}\right)^4$ $= \frac{1}{16} \left(\frac{52-c}{2}\right)^4 \leq \frac{24^4}{16} = 12^4.$ Do đó $P = abc \leq 36$, dấu bằng xảy ra khi $a = 3, b = 3, c = 4$. Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 36.	0,5
	Tìm giá trị nhỏ nhất. Với $a = 1$ ta có $b + c = 9$ và $c - b \leq 7$. Khi đó $P = bc = \frac{1}{4}[(b+c)^2 - (c-b)^2] \geq \frac{9^2 - 7^2}{4} = 8.$ Với $a \geq 2$ thì $b \geq 2$, kết hợp với $c \geq 4$ thì $P \geq 2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$. Từ đó ta có $P \geq 8$, dấu bằng xảy ra khi $a = b = 1$ và $c = 8$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 8.	0,5
	2) (1,0 điểm) Chứng minh rằng $P = (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$ chia hết cho 6.	
	Đặt $x = a - b, y = b - c$ và $z = c - a$, thế thì $x + y + z = 0$ hay $z = -(x + y)$. Ta có $P = x^3 + y^3 + z^3 = x^3 + y^3 - (x + y)^3 = -3xy(x + y) = 3xyz.$ Do đó P chia hết cho 3. (1)	0,5
IV	Trong 3 số a, b, c thì luôn tồn tại 2 số cùng chẵn hoặc cùng lẻ, nên hiệu của 2 số đó chia hết cho 2. Thế nên trong ba số x, y, z có ít nhất một số chia hết cho 2, suy ra P chia hết cho 2. (2) Từ (1) và (2) ta kết luận P chia hết cho 6.	0,5
	1) (1,0 điểm) Chứng minh rằng tứ giác $ACDH$ nội tiếp và $\widehat{CHD} = \widehat{ABC}$.	

Bài	Đáp án	Điểm
(3,0 điểm)		0,25
	Xét tứ giác $ACDH$ có $\widehat{AHC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$, nên tứ giác $ACDH$ nội tiếp.	0,25
	Từ đó, $\widehat{CHD} = \widehat{CAD}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn 1 cung) mà $\widehat{CAD} = \widehat{ABC}$ (cùng phụ với góc $\widehat{BCA}$) nên suy ra $\widehat{CHD} = \widehat{ABC}$.	0,5
	2) (1,0 điểm) Chứng minh rằng hai tam giác OHB và OBC đồng dạng với nhau	
	Xét tam giác OAC vuông tại A có AH là đường cao, ta chứng minh được tam giác OHA đồng dạng với tam giác OAC, nên $\frac{OH}{OA} = \frac{OA}{OC}$ suy ra $\frac{OH}{OB} = \frac{OB}{OC}$. Xét hai tam giác OHB và OBC. Ta có $\begin{cases} \widehat{BOH} = \widehat{COB} \\ \frac{OH}{OB} = \frac{OB}{OC} \end{cases}$, nên hai tam giác OHB và OBC đồng dạng với nhau (trường hợp c.g.c).	0,5
	Từ đó suy ra $\widehat{OHB} = \widehat{OBC}$. Mà $\widehat{OBC} = 90^\circ - \widehat{ACD} = 90^\circ - \widehat{DHM}$ (tứ giác $AHDC$ nội tiếp). Bên cạnh đó, $\widehat{OHB} = 90^\circ - \widehat{BHM}$. Suy ra, góc $\widehat{BHM} = \widehat{DHM}$, HM là tia phân giác của góc BHD.	0,5
	3) (1,0 điểm) Chứng minh rằng $MD \cdot BC = MB \cdot CD$ và $MB \cdot MD = MK \cdot MC$.	
	Xét tam giác BHD có HM, HC lần lượt là phân giác trong và ngoài tại góc H, khi đó $\frac{MB}{MD} = \frac{HB}{HD} = \frac{CB}{CD}$, hay ta suy ra điều phải chứng minh là $MD \cdot BC = MB \cdot CD$.	0,25

Bài	Đáp án	Điểm
	Gọi N là giao điểm thứ hai của AH và đường tròn (O). Ta có $OH \perp AN$ nên H là trung điểm AN và suy ra được OC là đường trung trực của AN, tức là $CA = CN$. Hai tam giác OAC và ONC bằng nhau theo trường hợp cạnh cạnh. Khi đó, góc $\widehat{ONC} = 90^\circ$. Mặt khác, $\widehat{OKC} = 90^\circ$ (K là trung điểm BD). Ta có $\widehat{ONC} = \widehat{OKC} = \widehat{OAC} = 90^\circ$ nên 5 điểm O, A, C, K, N cùng thuộc đường tròn đường kính OC. Bổ đề: I là giao điểm hai dây cung AC và BD của một đường tròn thì $IA \cdot IC = IB \cdot ID$. (dễ chứng minh) Khi đó, ta có $MN \cdot MA = MK \cdot MC$ (trong đường tròn đường kính OC) và $MN \cdot MA = MB \cdot MD$ (trong đường tròn (O)), suy ra $MK \cdot MC = MB \cdot MD$.	0,75
V (1,0 điểm)	1) (0,25 điểm) CMR có một tập con 4 phần tử của tập $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ không là CST.	0,25
	Tập $\{5; 6; 7; 8\}$ không là CST.	
	2) (0,75 điểm) Chứng minh rằng tập hợp S là CST.	0,25
	Với mỗi i nguyên dương, $1 \leq i \leq n+1$ thì a_i được biểu diễn duy nhất dưới dạng $a_i = 2^{k_i} m_i$, trong đó $k_i \in \mathbb{N}$ và m_i là số lẻ.	
	Do $1 \leq a_i \leq 2n$ nên $1 \leq m_i \leq 2n$ với mọi i, $1 \leq i \leq n+1$. Từ 1 đến $2n$ có tất cả n số lẻ, mà với mỗi i thì m_i là một trong n số lẻ này, vì có $n+1$ số $m_1, m_2, \dots, m_{n+1}$ nên tồn tại hai số bằng nhau. Tức là tồn tại i, j ($i \neq j$) sao cho $m_i = m_j = m$. Khi đó $a_i = 2^{k_i} m$ và $a_j = 2^{k_j} m$, trong hai số này có một số là ước của số kia. Vậy đã chứng minh được S là CST.	0,5

————— HẾT —————