

Bài 1. (2 điểm)

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + z^3 = 3y \\ y^3 + x^3 = 3z \\ z^3 + y^3 = 3x \end{cases}$$

2) Cho hai số nguyên dương a, b phân biệt. Chứng minh phương trình sau có đúng ba nghiệm

$$(\sqrt{x}-1)[x^2-2(a+b)x+ab+2]=0.$$

Bài 2. (1.5 điểm) Cho hai số thực không âm a, b thỏa $a+b=2$. Chứng minh

$$\frac{7}{2} \leq \frac{1}{a^3+b^3} + \frac{3}{ab} \leq \frac{7}{2ab}.$$

Bài 3. (2 điểm) Cho hai số tự nhiên a, b thỏa mãn $2a^2+a=3b^2-b$.

a) Chứng minh rằng nếu b là số nguyên tố thì $a=b$.

b) Chứng minh rằng $2a-2b+1$ là số chính phương.

Bài 4. (3 điểm) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) có tam giác ABD là tam giác nhọn và đường chéo AC đi qua tâm O của đường tròn (O) . Gọi I là trung điểm BD , H là trực tâm của tam giác ABD , E là giao điểm khác A của AI với (O) và K là hình chiếu vuông góc của H lên AI .

a) Chứng minh $CEHK$ là hình bình hành và $IB^2 = ID^2 = IA \cdot IK$.

b) Lấy điểm F trên cung nhỏ BD của đường tròn (O) sao cho $BAF = DAI$. Chứng minh các điểm K và F đối xứng nhau qua đường thẳng BD .

c) Chứng minh các đường phân giác trong các góc BAD và BKD cắt nhau trên BD .

d) Trên đường thẳng qua H và song song AC lấy điểm T sao cho $TH = TK$. Chứng minh các điểm O, K, F, T cùng thuộc một đường tròn.

Bài 5. (1.5 điểm) Cho các số nguyên dương $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{30} < a_{31}$. Người ta ghi tất cả các số này lên 31 chiếc thẻ, mỗi thẻ ghi một số.

a) Biết rằng tổng các số được ghi trên 16 thẻ bất kỳ trong số 31 thẻ trên luôn lớn hơn tổng các số được ghi trên 15 thẻ còn lại. Chứng minh $a_1 \geq 226$.

b) Lấy $a_1, a_2, \dots, a_{31}$ là 31 số nguyên dương đầu tiên: $1, 2, \dots, 31$. Người ta bỏ 31 thẻ được ghi các số này vào hai chiếc hộp một cách ngẫu nhiên. Khi kiểm tra một hộp thì thấy rằng trong hộp đó không có hai thẻ nào có tổng hai số được ghi là số chính phương. Chứng minh trong hộp còn lại ta có thể chọn ra được bốn thẻ và chia chúng thành hai cặp sao cho tổng hai số được ghi trên mỗi cặp là số chính phương.

-----HẾT-----