

Đề chính thức

MÔN THI: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu I. (3,5 điểm)

1) Giải phương trình

$$3x + \sqrt[3]{(2+3x)(2-x)} \left(\sqrt[3]{2+3x} - 2\sqrt[3]{2-x} \right) = 6.$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + 3y + 6xy = 2, \\ 3(4x^2 + 9y^2) = 6xy(4x^2 + 9y^2) + 30xy + 12. \end{cases}$$

Câu II. (2,5 điểm)

1) Tìm x, y nguyên thỏa mãn đẳng thức

$$8x^3 + 27y^3 = 18xy + 4x + 6y + 4.$$

2) Ký hiệu $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Với $y_1, y_2, \dots, y_6$ là các số thực bất kì, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \sum_{i=1}^6 \left(\frac{2y_i}{1+y_i^2} \right)^2 \left(\frac{2y_{i+1}}{1+y_{i+1}^2} - \frac{2y_{i-1}}{1+y_{i-1}^2} \right), \text{ trong đó } y_0 = y_6, y_7 = y_1.$$

Câu III. (3,0 điểm)

Cho hình thoi $ABCD$ với $\widehat{BAD} < 90^\circ$. Trên cạnh AD lấy điểm M ($M \neq A, D$). Các đường thẳng CM và AB cắt nhau tại Q .

1) Chứng minh rằng hai tam giác BCQ và DMC đồng dạng.

2) Trên cạnh AB lấy điểm N ($N \neq A, B$). Đường thẳng CN cắt đường thẳng AD tại

R . Chứng minh rằng $\frac{BN}{BQ} = \frac{DM}{DR}$.

3) Gọi (O) là đường tròn tiếp xúc với AB, AD lần lượt tại B, D . Giả sử tiếp tuyến qua R (khác RD) và tiếp tuyến qua Q (khác QB) của (O) cắt nhau tại P . Gọi giao điểm của AP và QR là S . Chứng minh rằng đường thẳng CS đi qua trung điểm của MN .

Câu IV. (1,0 điểm)

Có 100 điểm phân biệt trong một ngũ giác lồi, các điểm này cùng 5 đỉnh của ngũ giác tạo thành 105 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Biết rằng ngũ giác được chia hoàn toàn thành những tam giác được tạo bởi các đoạn thẳng nối giữa 2 trong 105 điểm trên sao cho:

- Không có 2 đoạn thẳng nào có điểm chung (ngoại trừ các đầu mút của chúng);
- Mỗi tam giác không chứa bất kì điểm nào ở bên trong nó.

Tính số tam giác thỏa mãn những yêu cầu trên.

HẾT

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI **ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO 10**
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN **TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2026**
ĐỀ CHÍNH THỨC

MÔN THI: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Bài 1 (3.5 điểm).

a) Giải phương trình $3x + \sqrt[3]{(2+3x)(2-x)} \left(\sqrt[3]{2+3x} - 2\sqrt[3]{2-x} \right) = 6.$

Bài 2 (2.5 điểm).

a) Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn $8x^3 + 27y^3 = 18xy + 4x + 6y + 4.$

b) Ký hiệu $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Với $y_1, y_2, \dots, y_6$ là các số thực bất kỳ, tìm giá trị lớn nhất của

biểu thức $M = \sum_{i=1}^6 \left(\frac{2y_i}{1+y_i^2} \right)^2 \left(\frac{2y_{i+1}}{1+y_{i+1}^2} - \frac{2y_{i-1}}{1+y_{i-1}^2} \right)$, trong đó $y_0 = y_6$ và $y_7 = y_1$.

Bài 3 (3.0 điểm). Cho hình thoi $ABCD$ với $\angle BAD < 90^\circ$. Trên cạnh AD , lấy điểm M (M khác A và D). Các đường thẳng CM và AB cắt nhau tại điểm Q .

a) Chứng minh rằng hai tam giác BCQ và DMC đồng dạng.

b) Trên cạnh AB , lấy điểm N (N khác A và B). Đường thẳng CN cắt đường thẳng AD tại điểm

R . Chứng minh rằng $\frac{BN}{BQ} = \frac{DM}{DR}$.

c) Gọi (O) là đường tròn tiếp xúc với các đường thẳng AB và AD lần lượt tại các điểm B và D .

Giả sử tiếp tuyến qua điểm R (khác RD) và tiếp tuyến qua điểm Q (khác QB) của đường tròn (O)

cắt nhau tại điểm P . Gọi giao điểm của hai đường thẳng AP và QR là S . Chứng minh rằng đường

thẳng CS đi qua trung điểm của đoạn thẳng MN .

Bài 4 (1.0 điểm). Có 100 điểm phân biệt trong một ngũ giác lồi, các điểm này cùng 5 đỉnh của ngũ giác tạo thành 105 điểm, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Biết rằng ngũ giác được chia hoàn toàn thành những tam giác được tạo bởi các đoạn thẳng nối giữa hai trong 105 điểm trên sao cho

i) Không có hai đoạn thẳng nào có điểm chung (ngoại trừ các đầu mút của chúng);

ii) Mỗi tam giác không chứa bất kỳ điểm nào ở bên trong nó.

Tính số tam giác thỏa mãn những yêu cầu trên.

--- **HẾT** ---

MÔN THI: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Bài 1 (3.5 điểm).

a) Giải phương trình $3x + \sqrt[3]{(2+3x)(2-x)} \left(\sqrt[3]{2+3x} - 2\sqrt[3]{2-x} \right) = 6.$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + 3y + 6xy = 2, \\ 3(4x^2 + 9y^2) = 6xy(4x^2 + 9y^2) + 30xy + 12. \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $a = \sqrt[3]{2+3x}$ và $b = \sqrt[3]{2-x}$.

Từ phương trình đã cho, ta có: $ab(a-2b) = 3b^3$ hay $b(a+b)(a-3b) = 0.$

Do đó $b = 0$, hoặc $a + b = 0$, hoặc $a - 3b = 0$.

Xét từng trường hợp, ta tìm được tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ 2; -2; \frac{26}{15} \right\}.$

b) Đặt $S = 2x + 3y$ và $P = 6xy$.

Khi đó hệ phương trình có thể được viết lại thành
$$\begin{cases} S + P = 2, \\ 3(S^2 - 2P) = P(S^2 - 2P) + 5P + 12. \end{cases}$$

Thay $P = 2 - S$ từ phương trình thứ nhất vào phương trình thứ hai, ta được

$$3(S^2 + 2S - 4) = (2 - S)(S^2 + 2S - 4) + 5(2 - S) + 12 \quad \text{hay} \quad (S - 2)(S^2 + 5S + 13) = 0.$$

Từ đó $S = 2$ và $P = 0$. Giải ra, ta thấy hệ phương trình đã cho có tất cả hai nghiệm $(x; y)$ là $(1; 0)$

và $\left(0; \frac{2}{3} \right).$

Bài 2 (2.5 điểm).

a) Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn $8x^3 + 27y^3 = 18xy + 4x + 6y + 4.$

b) Ký hiệu $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Với $y_1, y_2, \dots, y_6$ là các số thực bất kỳ, tìm giá trị lớn nhất của

biểu thức
$$M = \sum_{i=1}^6 \left(\frac{2y_i}{1+y_i^2} \right)^2 \left(\frac{2y_{i+1}}{1+y_{i+1}^2} - \frac{2y_{i-1}}{1+y_{i-1}^2} \right),$$
 trong đó $y_0 = y_6$ và $y_7 = y_1$.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $S = 2x + 3y$ và $P = 6xy$.

Khi đó, phương trình được viết lại thành $S^3 - 3SP = 3P + 2S + 4$ hay $3(S+1)P = S^3 - 2S - 4$.

Rõ ràng $S \neq -1$. Từ phương trình trên, ta suy ra $S^3 - 2S - 4$ chia hết cho $S+1$.

Mà $S^3 - 2S - 4 = (S^3 + 1) - 2(S+1) - 3$ nên 3 chia hết cho $S+1$, suy ra $S+1 \in \{-1; 1; -3; 3\}$, tức $S \in \{-2; 0; -4; 2\}$.

Chú ý là từ phương trình, ta cũng có $S^3 - 2S - 4$ chia hết cho 18.

Vì thế $S = 2$ và như thế $P = 0$. Giải ra, ta thấy có duy nhất một cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu là $(1; 0)$.

b) Đặt $x_i = \frac{2y_i}{y_i^2 + 1}$ với mọi $1 \leq i \leq 6$, khi đó ta có $-1 \leq x_i \leq 1$ với mọi $1 \leq i \leq 6$ và

$$\begin{aligned} M &= x_1^2(x_2 - x_6) + x_2^2(x_3 - x_1) + x_3^2(x_4 - x_2) + x_4^2(x_5 - x_3) + x_5^2(x_6 - x_4) + x_6^2(x_1 - x_5) \\ &= x_1x_2(x_1 - x_2) + x_2x_3(x_2 - x_3) + x_3x_4(x_3 - x_4) + \dots + x_6x_1(x_6 - x_1) \\ &= -\frac{1}{3} \left[(x_1 - x_2)^3 + (x_2 - x_3)^3 + \dots + (x_6 - x_1)^3 \right]. \end{aligned}$$

Đặt $z_i = x_i - x_{i+1}$ với mọi $1 \leq i \leq 6$, trong đó $x_7 = x_1$, thì $-2 \leq z_i \leq 2$ với mọi $1 \leq i \leq 6$ và $z_1 + z_2 + \dots + z_6 = 0$.

Lúc này
$$M = -\frac{1}{3} (z_1^3 + z_2^3 + \dots + z_6^3).$$

Ta có $(z_i - 1)^2(z_i + 2) \geq 0$, vì thế $z_i^3 \geq 3z_i - 2$ với mọi $1 \leq i \leq 6$.

Từ đây, ta được
$$M \leq -\frac{1}{3} [3(z_1 + z_2 + \dots + z_6) - 12] = 4.$$

Mặt khác, với $y_1 = -1, y_2 = 1, y_3 = 0, y_4 = -1, y_5 = 1, y_6 = 0$, thì $M = 4$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức M là 4.

Bài 3 (3.0 điểm). Cho hình thoi $ABCD$ với $\angle BAD < 90^\circ$. Trên cạnh AD , lấy điểm M (M khác A và D). Các đường thẳng CM và AB cắt nhau tại điểm Q .

a) Chứng minh rằng hai tam giác BCQ và DMC đồng dạng.

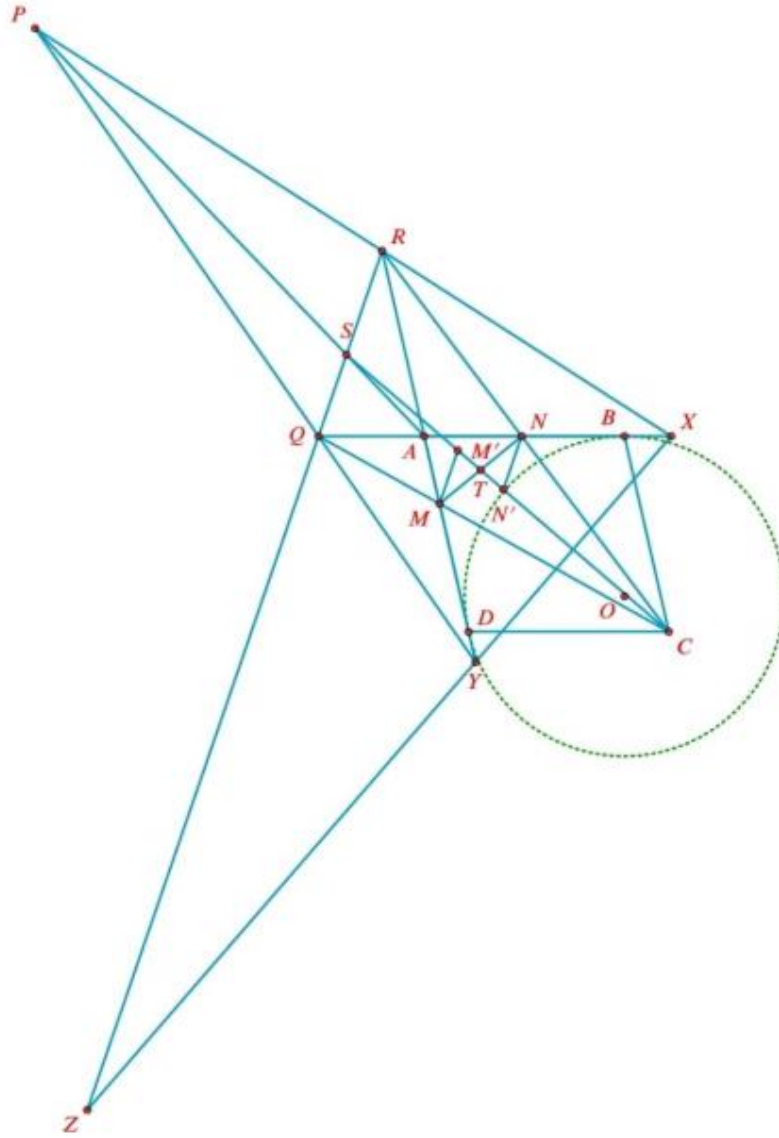
b) Trên cạnh AB , lấy điểm N (N khác A và B). Đường thẳng CN cắt đường thẳng AD tại điểm

R . Chứng minh rằng $\frac{BN}{BQ} = \frac{DM}{DR}$.

c) Gọi (O) là đường tròn tiếp xúc với các đường thẳng AB và AD lần lượt tại các điểm B và D .

Giả sử tiếp tuyến qua điểm R (khác RD) và tiếp tuyến qua điểm Q (khác QB) của đường tròn (O) cắt nhau tại điểm P . Gọi giao điểm của hai đường thẳng AP và QR là S . Chứng minh rằng đường thẳng CS đi qua trung điểm của đoạn thẳng MN .

Hướng dẫn giải



a) Xét $\triangle BCQ$ và $\triangle DMC$ có $\angle BCQ = \angle DMC$ (so le trong) và $\angle BQC = \angle DCM$ (so le trong)

Do đó $\triangle BCQ \sim \triangle DMC$ (g.g).

b) Từ câu a: $\triangle BCQ \sim \triangle DMC$ suy ra $\frac{BN}{DC} = \frac{BC}{DR}$, dẫn đến $BN \cdot DR = BC^2$. (1)

Từ câu a, ta có $\frac{BC}{DM} = \frac{BQ}{DC}$, dẫn đến $BQ \cdot DM = BC^2$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BN \cdot DR = BQ \cdot DM$, hay $\frac{BN}{BQ} = \frac{DM}{DR}$.

c) Trước hết, ta chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề. Cho tứ giác $XYQR$ thỏa mãn tồn tại đường tròn (O) tiếp xúc với các đoạn thẳng QX, RY tương ứng tại các điểm B, D và tiếp xúc với các tia đối của các tia XR, YQ tương ứng tại U, V .

Khi đó, các đường thẳng XY, QR, BD, UV đồng quy tại điểm Z thỏa mãn $\frac{ZQ}{ZR} = \frac{BQ}{DR}$.

Chứng minh. Gọi Z là giao điểm của hai đường thẳng QR và BD .

Kẻ đường thẳng RR' song song với đường thẳng BQ , cắt đường thẳng BD tại điểm R' .

Ta có $\frac{AB}{RR'} = \frac{AD}{RD}$ và $AB = AD$, nên suy ra được $RR' = RD$. Do đó $\frac{ZQ}{ZR} = \frac{BQ}{RR'} = \frac{BQ}{DR}$.

Bây giờ, gọi Z' là giao điểm của hai đường thẳng QR và UV . Chứng minh tương tự như trên, ta có

$$\frac{Z'Q}{Z'R} = \frac{VQ}{UR}.$$

Lại có $BQ = VQ$ và $DR = UR$, ta suy ra $\frac{ZQ}{ZR} = \frac{Z'Q}{Z'R}$.

Do đó Z' trùng Z . Vì thế, ba đường thẳng QR, BD, UV đồng quy tại điểm Z .

Lập luận tương tự, ta cũng chứng minh được ba đường thẳng XY, BD, UV đồng quy. Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán: Gọi X là giao điểm của hai đường thẳng PR và AB , Y là giao điểm của hai đường thẳng PQ và AD .

Gọi Z là giao điểm của hai đường thẳng QR và XY , T là giao điểm của hai đường thẳng CS và MN .

Xét tứ giác $XYQR$ có đường tròn (O) tiếp xúc với XQ, XR, YQ, YR .

Theo bổ đề trên, ta có $\frac{ZQ}{ZR} = \frac{BQ}{DR}$.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác PQR với ba điểm X, Y, Z thẳng hàng và áp dụng định lý

Ceva cho tam giác PQR với ba đường thẳng PS, QX, RY đồng quy tại điểm A , ta có

$$\frac{SQ}{SR} = \frac{XP}{XR} \cdot \frac{YQ}{YP} = \frac{ZQ}{ZR} = \frac{BQ}{DR}.$$

Kẻ các đường thẳng MM' , NN' song song với đường thẳng QR , trong đó M' và N' thuộc đường thẳng CS .

$$\text{Ta có } \frac{TM}{TN} = \frac{MM'}{NN'} = \frac{MM'}{SQ} \cdot \frac{SQ}{SR} \cdot \frac{SR}{NN'} = \frac{CM}{CQ} \cdot \frac{SQ}{SR} \cdot \frac{CR}{CN} = \frac{BA}{BQ} \cdot \frac{SQ}{SR} \cdot \frac{DR}{DA} = 1.$$

Vậy T là trung điểm của đoạn thẳng MN .

Bài 4 (1.0 điểm). Có 100 điểm phân biệt trong một ngũ giác lồi, các điểm này cùng 5 đỉnh của ngũ giác tạo thành 105 điểm, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Biết rằng ngũ giác được chia hoàn toàn thành những tam giác được tạo bởi các đoạn thẳng nối giữa hai trong 105 điểm trên sao cho

- i) Không có hai đoạn thẳng nào có điểm chung (ngoại trừ các đầu mút của chúng);
- ii) Mỗi tam giác không chứa bất kỳ điểm nào ở bên trong nó.

Tính số tam giác thỏa mãn những yêu cầu trên.

Hướng dẫn giải

Xét A là tập các tam giác. Xét B là tập các góc của các tam giác trong A . Xét C là tổng số đo các góc trong B . Dễ thấy rằng với tổng các góc trong một tam giác là 180° thì ta có $C = 180^\circ \cdot |A|$. (1)

Mặt khác, ta phân hoạch các góc trong B thành các nhóm góc chung đỉnh. Xét một nhóm các góc chung đỉnh thì có hai trường hợp:

Trường hợp 1. Các góc này có chung đỉnh là một trong 100 đỉnh bên trong đa giác, tổng các góc trong nhóm này là 360° .

Trường hợp 2. Các góc này có chung đỉnh là một trong 5 đỉnh của ngũ giác (gọi là đỉnh O), lúc này tổng các góc trong nhóm này chính là số đo góc tại đỉnh O của ngũ giác. Tổng của 5 nhóm ứng với 5 đỉnh của ngũ giác chính là tổng số đo các góc trong ngũ giác và là $3 \cdot 180^\circ$.

$$\text{Từ đây, ta thu được } C = 100 \cdot 360^\circ + 3 \cdot 180^\circ = 36\,540^\circ. \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2), ta thu được $|A| = 203$.

--- HẾT ---