

Đề chính thức

MÔN THI: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu I. (3,5 điểm)

1) Giải phương trình

$$1 + 5\sqrt[3]{1 - 25x^2} + \sqrt[3]{1 + 5x} + \sqrt[3]{1 - 5x} = 4\left(\sqrt[3]{(1 + 5x)^2} + \sqrt[3]{(1 - 5x)^2}\right).$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 8y^3 + 6xy + x = 3(x^2 + 4y^2) + 1, \\ x^3 + 2 = x^2 + 2y. \end{cases}$$

Câu II. (1,5 điểm)

Xét phương trình $(x^3 + y)(y^3 + x) = 3^z$, trong đó x, y, z là các số nguyên dương.

1) Chứng minh rằng khi $x = y$ thì không tồn tại z thỏa mãn phương trình.

2) Tìm tất cả các bộ (x, y, z) thỏa mãn phương trình với $x > y$.

Câu III. (1,0 điểm)

Với các số thực không âm a, b, c, d thỏa mãn đẳng thức $a + b + c + d = 1$, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S = (a^4 + b^4 + c^4 + d^4) - (a^5 + b^5 + c^5 + d^5).$$

Câu IV. (3,0 điểm)

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) với $\widehat{DCB} < \widehat{ADC} < 90^\circ$, giả sử có điểm P nằm trong tứ giác $ABCD$ sao cho PA vuông góc AD và PB vuông góc BC . Dựng hình bình hành $PAQB$. Gọi K là hình chiếu vuông góc của Q lên AB .

1) Chứng minh rằng $\widehat{KQB} = \widehat{BCD}$.

2) Gọi H là hình chiếu vuông góc của P lên CD . Chứng minh rằng $\frac{HD}{HC} = \frac{KB}{KA}$.

3) Lấy điểm R sao cho DR song song AH và CR song song BH . Gọi giao điểm của hai đường thẳng RH và AB là L . Chứng minh rằng các điểm D, C, K, L cùng nằm trên một đường tròn.

Câu V. (1,0 điểm)

Với mỗi dãy số $a_1, a_2, \dots, a_{600}$ gồm 600 số nguyên dương, ký hiệu m là số bộ (a_i, a_j, a_k) với $1 \leq i < j < k \leq 600$ thỏa mãn $a_j = a_i + 1$ và $a_k = a_j + 1$. Xét tất cả các dãy số như trên, hãy tìm giá trị lớn nhất có thể của m .

---HẾT---

MÔN THI: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu I. (3,5 điểm)

1. Giải phương trình

$$1 + 5\sqrt[3]{1 - 25x^2} + \sqrt[3]{1 + 5x} + \sqrt[3]{1 - 5x} = 4\left(\sqrt[3]{(1 + 5x)^2} + \sqrt[3]{(1 - 5x)^2}\right).$$

2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 8y^3 + 6xy + x = 3(x^2 + 4y^2) + 1, \\ x^3 + 2 = x^2 + 2y. \end{cases}$$

Câu II. (1,5 điểm) Xét phương trình $(x^3 + y)(y^3 + x) = 3^z$, trong đó x, y, z là các số nguyên dương.

1. Chứng minh rằng khi $x = y$ thì không tồn tại z thỏa mãn phương trình.

2. Tìm tất cả các bộ (x, y, z) thỏa mãn phương trình với $x > y$.

Câu III. (1,0 điểm) Với các số thực không âm a, b, c, d thỏa mãn đẳng thức $a + b + c + d = 1$, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S = (a^4 + b^4 + c^4 + d^4) - (a^5 + b^5 + c^5 + d^5).$$

Câu IV. (3,0 điểm) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) với $DCB < ADC < 90^\circ$, giả sử có điểm P nằm trong tứ giác $ABCD$ sao cho PA vuông góc AD và PB vuông góc BC . Vẽ hình bình hành $PAQB$. Gọi K là hình chiếu vuông góc của Q lên AB .

1. Chứng minh rằng $KQB = BCD$.

2. Gọi H là hình chiếu vuông góc của P lên AC . Chứng minh rằng $\frac{HD}{HC} = \frac{KB}{KA}$.

3. Lấy điểm R sao cho DR song song AH và CR song song BH . Gọi giao điểm của hai đường thẳng RH và AB là L . Chứng minh rằng các điểm D, C, K, L cùng nằm trên một đường tròn.

Câu V. (1,0 điểm) Với mỗi dãy số $a_1, a_2, \dots, a_{600}$ gồm 600 số nguyên dương, ký hiệu m là số bộ (a_i, a_j, a_k) với $1 \leq i < j < k \leq 600$ thỏa mãn $a_j = a_i + 1$ và $a_k = a_j + 1$. Xét tất cả các dãy số như trên, hãy tìm giá trị lớn nhất có thể của m .

--- HẾT ---

MÔN THI: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu I. (3,5 điểm)

1. Giải phương trình

$$1 + 5\sqrt[3]{1-25x^2} + \sqrt[3]{1+5x} + \sqrt[3]{1-5x} = 4\left(\sqrt[3]{(1+5x)^2} + \sqrt[3]{(1-5x)^2}\right).$$

2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 8y^3 + 6xy + x = 3(x^2 + 4y^2) + 1, & (1) \\ x^3 + 2 = x^2 + 2y. & (2) \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

1. Đặt $a = \sqrt[3]{1+5x}$ và $b = \sqrt[3]{1-5x}$ thì $a^3 + b^3 = 2$ và phương trình trở thành:

$$1 + 5ab + a + b = 4(a^2 + b^2).$$

Ta thu được hệ đối xứng loại I:
$$\begin{cases} (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 2, \\ 1 + 5ab + (a+b) = 4(a+b)^2 - 8ab. \end{cases}$$

Đặt $S = a + b$; $P = ab$.

Khi đó hệ trở thành
$$\begin{cases} S^3 - 3PS = 2 \\ 1 + 5P + S = 4S^2 - 8P \end{cases}.$$

Từ phương trình thứ hai ta có $P = \frac{4S^2 - S - 1}{13}$, thay vào phương trình thứ nhất ta được

$$S^3 - 3S \cdot \frac{4S^2 - S - 1}{13} = 2$$

Hay $(S+1)^3 = 27$. Từ đó tìm được $S = 2$, $P = 1$ suy ra $a = b = 1$. Do đó $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

2. Đặt $x = a + 1$; $2y = b + 1$ thì phương trình (1) trở thành $a^3 + b^3 + 3ab + a - 1 = 0$ và phương trình (2) trở thành $b - 1 = a^3 + 2a^2 + a = a(a+1)^2$.

Ta có $a^3 + b^3 + 1 - 3ab = (a+b+1)(a^2 + b^2 + 1 - ab - a - b)$.

Suy ra $(a+b-1)(a^2 + b^2 - ab + a + b + 1) + a = 0$

Lại có $b - 1 = a^3 + 2a^2 + a = a(a+1)^2$ nên $a\left\{\left[(a+1)^2 + 1\right](a^2 + b^2 - ab + a + b + 1) + 1\right\} = 0$.

Dễ dàng có $(a^2 + b^2 - ab + a + b + 1) + 1 > 0$ suy ra $a = 0, b = 1$. Từ đó suy ra $x = y = 1$.

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (1; 1)$.

Câu II. (1,5 điểm) Xét phương trình $(x^3 + y)(y^3 + x) = 3^z$, trong đó x, y, z là các số nguyên dương.

1. Chứng minh rằng khi $x = y$ thì không tồn tại z thỏa mãn phương trình.

2. Tìm tất cả các bộ (x, y, z) thỏa mãn phương trình với $x > y$.

Lời giải

1. Khi $x = y$, phương trình ban đầu trở thành:

$$(x^3 + x)(x^3 + x) = 3^z \text{ suy ra } (x^3 + x)^2 = 3^z \quad (1)$$

Ta có $x^3 + x = x(x^2 + 1)$ luôn là số chẵn nên 3^z là số chẵn, vô lý.

Do đó không tồn tại z thỏa mãn phương trình.

2. Từ giả thiết ta có $x^3 + y$ và $y^3 + x$ đều là lũy thừa của 3, đặt $x^3 + y = 3^a$ và $y^3 + x = 3^b$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Vì $x > y \geq 1$ nên $a > b \geq 1$. Do đó $3^a - 3^b$ và $3^a + 3^b$ đều chia hết cho 3^b .

$$\text{Lại có } 3^a + 3^b = (x + y)(x^2 - xy + y^2 + 1); 3^a - 3^b = (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 1).$$

Đề ý rằng $(x^2 - xy + y^2 + 1) + (x^2 + xy + y^2 - 1) = 2(x^2 + y^2)$ nên nếu cả hai số này đều chia hết cho 3 thì x, y đều chia hết cho 3, khi đó 1 chia hết cho 3 (vô lý).

Do đó trong hai số $(x^2 - xy + y^2 + 1)$ và $(x^2 + xy + y^2 - 1)$ có ít nhất một trong hai số không chia hết cho 3.

Điều này dẫn tới trong hai số $x - y$ và $x + y$ có một số chia hết cho 3^b .

Lại có $0 < x - y < x + y^3 = 3^b$ nên chỉ có $x + y$ chia hết cho 3^b .

Mà $0 < x + y \leq x + y^3 = 3^b$ nên $y = 1$. Khi đó $x + 1$ và $x^3 + 1$ đều là lũy thừa của 3, suy ra $x^2 - x + 1$ cũng là lũy thừa của 3.

Mà với $x \geq 2$ thì $x^2 - x + 1 \geq x + 1$ nên $x^2 - x + 1$ chia hết cho $x + 1$, từ đây dễ dàng tìm được $x = 2$.

Từ đó ta tìm được $(x; y; z) = (2; 1; 3)$.

Câu III. (1,0 điểm) Với các số thực không âm a, b, c, d thỏa mãn đẳng thức $a + b + c + d = 1$, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S = (a^4 + b^4 + c^4 + d^4) - (a^5 + b^5 + c^5 + d^5).$$

Hướng dẫn giải

Do vai trò của các biến như nhau, giả sử $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$.

Vì $a+b+c+d=1$ nên $a \geq \frac{1}{4}$.

Đặt $x=b+c+d$, suy ra $a+x=1$.

Ta chứng minh: $b^4(1-b)+c^4(1-c)+d^4(1-d) \leq x^4(1-x)$

Thật vậy, xét hiệu:

$$\begin{aligned} T &= x^4(1-x) - [b^4(1-b) + c^4(1-c) + d^4(1-d)] \\ &= a[(b+c+d)^4 - b^4 - c^4 - d^4] - [b^4(c+d) + c^4(b+d) + d^4(b+c)] \end{aligned}$$

Do $a \geq b$, và dễ thấy $(b+c+d)^4 - b^4 - c^4 - d^4 \geq 4b^3(c+d)$, ta có:

$$a[(b+c+d)^4 - b^4 - c^4 - d^4] \geq b \cdot 4b^3(c+d) = 4b^4(c+d).$$

Mặt khác, do $b \geq c \geq d$ nên:

$$b^4(c+d) + c^4(b+d) + d^4(b+c) \leq b^4(c+d) + b^4(c+d) + b^4(c+d) = 3b^4(c+d)$$

Từ đó suy ra $T \geq 4b^4(c+d) - 3b^4(c+d) = b^4(c+d) \geq 0$. Bất đẳng thức được chứng minh.

Khi đó ta được: $S \leq a^4(1-a) + x^4(1-x) = a^4x + x^4a = ax(a^3 + x^3)$

$$S \leq ax(a+x)(a^2 - ax + x^2) = ax(1-3ax)$$

$$\text{Suy ra } 3S \leq 3ax(1-3ax) \leq \left(\frac{3ax+1-3ax}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \text{ nên } S \leq \frac{1}{12}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $c=d=0$; $a+b=1$ và $3ab=1-3ab$.

Giải các điều kiện ta được $(a; b; c; d) = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}; \frac{3-\sqrt{3}}{6}; 0; 0 \right)$ và các hoán vị tương ứng.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức S là $\frac{1}{12}$.

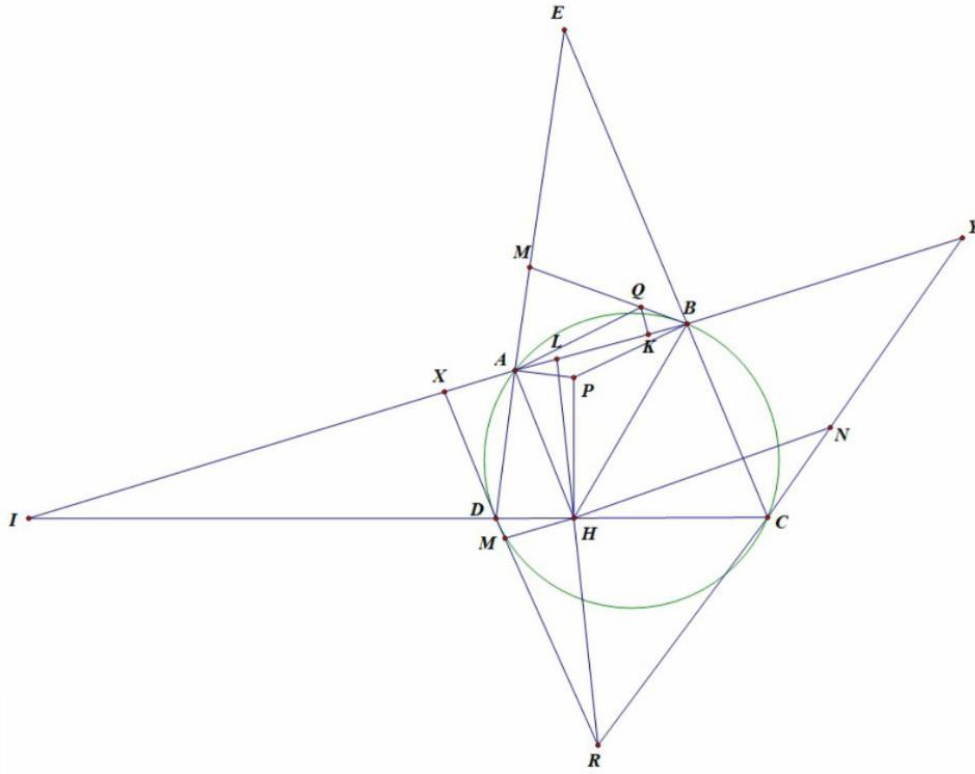
Câu IV. (3,0 điểm) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) với $DCB < ADC < 90^\circ$, giả sử có điểm P nằm trong tứ giác $ABCD$ sao cho PA vuông góc AD và PB vuông góc BC . Dựng hình bình hành $PAQB$. Gọi K là hình chiếu vuông góc của Q lên AB .

1. Chứng minh rằng $KQB = BCD$.

2. Gọi H là hình chiếu vuông góc của P lên AB . Chứng minh rằng $\frac{HD}{HC} = \frac{KB}{KA}$.

3. Lấy điểm R sao cho DR song song AH và CR song song BH . Gọi giao điểm của hai đường thẳng RH và AB là L . Chứng minh rằng các điểm D, C, K, L cùng nằm trên một đường tròn.

Hướng dẫn giải



1. Ta gọi AD cắt BC tại E thì Q là trực tâm tam giác EAB . Do đó $KQB = EAB = BCD$.

2. Vì tứ giác $PAEB$ là tứ giác nội tiếp nên ta có $EPA = EBA = ADH$.

Lại có $ADH + APH = 180^\circ$ ($APHD$ là tứ giác nội tiếp) nên $EPA + APH = 180^\circ$ hay E, P, H thẳng hàng.

Dễ dàng có $\triangle EKB \sim \triangle EHD$ và $\triangle EKA \sim \triangle EHC$, từ đó suy ra $\frac{HD}{HC} = \frac{KB}{KA}$.

3. Gọi I là giao điểm của AB và CD ; X là giao điểm của DR và AB ; Y là giao điểm của CR và AB . Kẻ đường thẳng qua H song song với AB , cắt DR tại M và cắt CR tại N .

Theo định lý Thalès: $\frac{HM}{LX} = \frac{RH}{RL} = \frac{HN}{LY}$ suy ra $\frac{LX}{LY} = \frac{HM}{HN}$.

Xét $\triangle IAH$ có $DX \parallel AH$ suy ra $IX = \frac{IA \cdot ID}{IH}$. Tương tự $IY = \frac{IB \cdot IC}{IH}$.

Lại có $HM \parallel IX$ nên $\frac{HM}{IX} = \frac{DH}{DI}$ suy ra $HM = \frac{IA \cdot DH}{IH}$. Tương tự $HN = \frac{IB \cdot CH}{IH}$.

Suy ra $\frac{LX}{LY} = \frac{IA \cdot DH}{IB \cdot CH}$. Kết hợp với chứng minh từ câu 2, ta được: $\frac{LX}{LY} = \frac{IA \cdot KB}{IB \cdot KA}$.

Đặt $IA = a$; $IB = b$; $IC = c$; $ID = d$; $IK = k$; $IL = l$; $IH = h$. Ta có $IX = \frac{ad}{h}$ và $IY = \frac{bc}{h}$.

Từ hệ thức $\frac{DH}{CH} = \frac{KB}{KA}$, ta có $h(b-a) = k(d-c) - (ad-bc)$.

Mặt khác, $\frac{LX}{LY} = \frac{l-IX}{IY-l} = \frac{l-\frac{ad}{h}}{\frac{bc}{h}-l}$.

Thay vào tỉ lệ $\frac{LX}{LY} = \frac{a(b-k)}{b(k-a)}$, nhân chéo và rút gọn kết hợp với $h(b-a)$ ở trên, ta thu được

$$l \cdot k = a \cdot b \text{ suy ra } IL \cdot IK = IA \cdot IB.$$

Do $ABCD$ nội tiếp nên $IA \cdot IB = IC \cdot ID$.

Vậy $IL \cdot IK = IC \cdot ID$, suy ra 4 điểm D, C, K, L cùng thuộc một đường tròn (đpcm).

Câu V. (1,0 điểm) Với mỗi dãy số $a_1, a_2, \dots, a_{600}$ gồm 600 số nguyên dương, ký hiệu m là số bộ (a_i, a_j, a_k) với $1 \leq i < j < k \leq 600$ thỏa mãn $a_j = a_i + 1$ và $a_k = a_j + 1$. Xét tất cả các dãy số như trên, hãy tìm giá trị lớn nhất có thể của m .

Lời giải

Gọi c_v là số lần xuất hiện của giá trị nguyên dương v trong dãy số đã cho.

Theo giả thiết, tổng số phần tử của toàn bộ dãy là $\sum c_v = 600$.

Để số bộ ba (a_i, a_j, a_k) thỏa mãn điều kiện là lớn nhất, ta sắp xếp dãy số $a_1, a_2, \dots, a_{600}$ theo thứ tự không giảm.

Khi đó, số bộ ba tạo thành 3 số nguyên liên tiếp chính là: $m = \sum c_v c_{v+1} c_{v+2}$.

Xét các tổng sau:

$$X = c_1 + c_4 + c_7 + \dots = \sum c_{3t+1}$$

$$Y = c_2 + c_5 + c_8 + \dots = \sum c_{3t+2}$$

$$Z = c_3 + c_6 + c_9 + \dots = \sum c_{3t}$$

Rõ ràng ta có $X + Y + Z = \sum c_v = 600$.

Dễ thấy, ba số nguyên liên tiếp $v, v+1, v+2$ luôn có 3 số dư phân biệt khi chia cho 3.

Do đó, trong tích $c_v c_{v+1} c_{v+2}$, luôn có đúng một thừa số thuộc tổng X , một thừa số thuộc tổng Y và một thừa số thuộc tổng Z .

Mặt khác, khi khai triển tích $X \cdot Y \cdot Z$, ta thu được tổng của tất cả các hạng tử dạng $c_i c_j c_k$, trong đó i, j, k mang số dư khác nhau khi chia cho 3.

Vì $c_v \geq 0$ với mọi v , tổng này chắc chắn chứa toàn bộ các hạng tử của m .

Điều này dẫn đến: $m = \sum c_v c_{v+1} c_{v+2} \leq X \cdot Y \cdot Z$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy (AM-GM) cho 3 số không âm X, Y, Z , ta có:

$$m \leq X \cdot Y \cdot Z \leq \left(\frac{X+Y+Z}{3} \right)^3 = \left(\frac{600}{3} \right)^3 = 200^3 = 8\,000\,000$$

Để thấy dãy số gồm 200 số 1, 200 số 2 và 200 số 3 được sắp xếp tăng dần là 1 dãy số thỏa mãn với $m = 8\,000\,000$.

Vậy giá trị lớn nhất có thể của m là $8\,000\,000$.

--- HẾT ---