

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang)

Môn thi : TOÁN (chuyên)
Thời gian : 150 phút (không kể thời gian giao đề)
(Dành cho thí sinh thi vào các trường THPT chuyên)

Câu 1. (1,5 điểm)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a} + 2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{b}}{\sqrt{a} + 4\sqrt{b}} - \frac{7\sqrt{ab} + 10b}{a + 4b + 5\sqrt{ab}} \right) \cdot \frac{a + 12b + 7\sqrt{ab}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}$, với $a, b > 0$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Khi P là số nguyên, tính giá trị biểu thức $Q = \frac{a + 2025b}{a + 2026b}$.

Câu 2. (1,5 điểm)

Hai bạn An và Bình, mỗi bạn chọn ngẫu nhiên một đỉnh của lục giác đều $ABCDEF$ cạnh a .

a) Mô tả không gian mẫu và các kết quả thuận lợi của biến cố M : “Bạn An và bạn Bình chọn được hai đỉnh trùng nhau”.

b) Tính xác suất của biến cố N : “Bạn An và bạn Bình chọn được hai đỉnh mà khoảng cách giữa chúng bằng $a\sqrt{3}$ ”.

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt{3}(x^2 - x) = \sqrt{3x^2 - 2x - 1}$.

b) Tại một Trường Trung học cơ sở A, khối lớp 8 có số học sinh nam gấp 3 lần số học sinh nữ; khối lớp 9 có số học sinh nam gấp 6 lần số học sinh nữ. Nếu tính chung cả hai khối thì tổng số học sinh là 750 và tổng số học sinh nam gấp 4 lần tổng số học sinh nữ. Hỏi khối lớp 8, khối lớp 9 ở Trường A, mỗi khối có bao nhiêu học sinh?

Câu 4. (1,5 điểm)

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tất cả các số thực âm a để parabol $(P): y = x^2$ cắt đường thẳng $d_1: y = x - a$ tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 và cắt đường thẳng $d_2: y = 2x - 3a$ tại hai điểm có hoành độ x_3, x_4 thỏa mãn $\frac{1}{x_1 - x_3} + \frac{1}{x_2 - x_3} + \frac{1}{x_1 - x_4} + \frac{1}{x_2 - x_4} = \frac{1}{3}$.

b) Tồn tại hay không các số nguyên dương x, y sao cho giá trị biểu thức $\frac{x^2 + x - 2}{y^2 + 2y}$ là bình phương của một số nguyên tố? Vì sao?

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC ($AB < AC < BC$), có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Gọi P là hình chiếu vuông góc của C lên đường thẳng BI .

a) Chứng minh rằng $2 \cdot \widehat{PIC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$ và ba điểm P, E, F thẳng hàng.

b) Tia DI cắt các đường thẳng EF, PC lần lượt tại L, K . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, IK . Chứng minh rằng MN vuông góc với EF và $\frac{DI}{DN} + \frac{NL}{NI} = 1$.

Câu 6. (1,5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Dựng hình bình hành $ABDC$. Trên cung nhỏ BC của đường tròn (O) lấy điểm M sao cho tia DM nằm giữa tia DA và tia DC . Đường thẳng qua M , song song với đường thẳng AC , cắt cạnh AB tại P và đường thẳng qua M , song song với đường thẳng AB , cắt cạnh AC tại Q . Đường thẳng AD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ tại F (F khác A). Chứng minh rằng tam giác MBC đồng dạng tam giác PMA và AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MDF .

----- HẾT -----

Bài 1. (1,5 điểm)

Cho
$$P = \left(\frac{\sqrt{a} + 2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{b}}{\sqrt{a} + 4\sqrt{b}} - \frac{7\sqrt{ab} + 10b}{a + 4b + 5\sqrt{ab}} \right) \cdot \frac{a + 12b + 7\sqrt{ab}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}, \text{ với } a, b > 0.$$

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Khi P là số nguyên, tính giá trị biểu thức $Q = \frac{a + 2025b}{a + 2026b}$.

Hướng dẫn giải

a)
$$P = \left(\frac{\sqrt{a} + 2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{b}}{\sqrt{a} + 4\sqrt{b}} - \frac{7\sqrt{ab} + 10b}{a + 4b + 5\sqrt{ab}} \right) \cdot \frac{a + 12b + 7\sqrt{ab}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}$$
$$= \frac{(\sqrt{a} + 2\sqrt{b})(\sqrt{a} + 4\sqrt{b}) + 3\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - (7\sqrt{ab} + 10b)}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + 4\sqrt{b})} \cdot \frac{(\sqrt{a} + 3\sqrt{b})(\sqrt{a} + 4\sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}$$
$$= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + 4\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + 4\sqrt{b}}.$$

b) Ta có $P = 1 + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}, \text{ vì } 0 < \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} < \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = 2 \text{ nên } 1 < P < 3.$

Vì P là số nguyên nên $P = 2$, hay $a = b$.

Thay vào có được $Q = \frac{2026}{2027}.$

Bài 2. (1,5 điểm)

Hai bạn An và Bình, mỗi bạn chọn ngẫu nhiên một đỉnh lục giác đều $ABCDEF$ cạnh a .

a) Mô tả không gian mẫu và các kết quả thuận lợi của biến cố M : "Bạn An và bạn Bình chọn được hai đỉnh trùng nhau".

b) Tính xác suất của biến cố N : "Bạn An và bạn Bình chọn được hai đỉnh mà khoảng cách giữa chúng bằng $a\sqrt{3}$ ".

Hướng dẫn giải

a) Ta có $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$ (không gian mẫu) và $|\Omega_M| = 6$ (kết quả thuận lợi)

$$\Omega = \{(x; y) \mid x, y \in \{A; B; C; D; E; F\}\}$$

và

$$\Omega_M = \{(A; A); (B; B); (C; C); (D; D); (E; E); (F; F)\}$$

b) Xét tam giác ABC có $BA = BC = a$ và $\angle ABC = 120^\circ$.

Kẻ đường cao BH ($H \in AC$), tính được $\angle ABH = 60^\circ$ nên $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ hay $AC = a\sqrt{3}$.

Tương tự tính được $AC = BD = CE = DF = EA = FB = a\sqrt{3}$.

Để khoảng cách giữa hai đỉnh được chọn bằng $a\sqrt{3}$, hai bạn An và Bình phải chọn các cặp đỉnh không thứ tự thuộc tập hợp sau:

$$\{A; C\}; \{B; D\}; \{C; E\}; \{D; F\}; \{E; A\}; \{F; B\}.$$

Do đó, số kết quả thuận lợi cho biến cố N là: $|\Omega_N| = 6 \cdot 2 = 12$.

Vậy xác suất cần tìm là $\frac{|\Omega_N|}{|\Omega|} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

Bài 3. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt{3}(x^2 - x) = \sqrt{3x^2 - 2x - 1}$.

b) Tại một Trường Trung học cơ sở A, khối lớp 8 có số học sinh nam gấp 3 lần số học sinh nữ; khối lớp 9 có số học sinh nam gấp 6 lần số học sinh nữ. Nếu tính chung cả hai khối thì tổng số học sinh là 750 và tổng số học sinh nam gấp 4 lần tổng số học sinh nữ. Hỏi khối lớp 8, khối lớp 9 ở Trường A, mỗi khối có bao nhiêu học sinh?

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện xác định: $x^2 - x \geq 0$ và $3x^2 - 2x - 1 \geq 0$, tức $x \geq 1$ hoặc $x \leq -\frac{1}{3}$.

Bình phương hai vế ta được $3(x^2 - x)^2 = 3x^2 - 2x - 1$

$$(x-1)[3x^2(x-1) - (3x+1)] = 0$$

$$(x-1)(3x^3 - 3x^2 - 3x - 1) = 0.$$

• $x-1=0$ hay $x=1$, thỏa mãn điều kiện xác định.

• $3x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$ hay $4x^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ hay $4x^3 = (x+1)^3$.

Do đó $x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$, thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy phương trình có nghiệm là $x=1$ và $x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$.

b) Gọi số học sinh nữ khối 8 là x và số học sinh nữ khối 9 là y ($x, y \in \mathbb{N}^*$).

Vì số học sinh nam khối 8 gấp 3 lần số học sinh nữ nên tổng số học sinh khối 8 là $3x + x = 4x$.

Tương tự tổng số học sinh khối 9 là $y + 6y = 7y$.

Từ giả thiết ta có $4x + 7y = 750$ và $3x + 6y = 4(x+y)$ hay $x = 2y$.

Do đó $y = 50$ và $x = 100$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy tổng số học sinh khối 8 là 400 học sinh, và tổng số học sinh khối 9 là 350 học sinh.

Bài tập 4 (1,5 điểm)

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tất cả các số thực âm a để parabol $(P): y = x^2$ cắt đường thẳng $d_1: y = x - a$ tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 và cắt đường thẳng $d_2: y = 2x - 3a$ tại hai điểm có

hoành độ x_3, x_4 thỏa mãn $\frac{1}{x_1 - x_3} + \frac{1}{x_2 - x_3} + \frac{1}{x_1 - x_4} + \frac{1}{x_2 - x_4} = \frac{1}{3}$.

b) Tồn tại hay không các số nguyên dương x, y sao cho giá trị biểu thức $\frac{x^2 + x - 2}{y^2 + 2y}$ là bình phương của một số nguyên tố? Vì sao?

Hướng dẫn giải

a) d_1 cắt (P) tại x_1, x_2 tại hai nghiệm của phương trình $x^2 - x + a = 0$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta_1 = 1 - 4a > 0$ hay $a < \frac{1}{4}$.

d_2 cắt (P) tại x_3, x_4 tại hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2x + 3a = 0$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta_2 = 1 - 3a > 0$ hay $a < \frac{1}{3}$.

Theo định lý Viète ta có được $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 x_2 = a$, $x_3 + x_4 = 2$, $x_3 x_4 = 3a$.

$$\text{Xét } S = \frac{1}{x_1 - x_3} + \frac{1}{x_2 - x_3} + \frac{1}{x_1 - x_4} + \frac{1}{x_2 - x_4} = \left(\frac{1}{x_1 - x_3} + \frac{1}{x_2 - x_3} \right) + \left(\frac{1}{x_1 - x_4} + \frac{1}{x_2 - x_4} \right).$$

Đề ý $x_3^2 = 2x_3 - 3a$ nên

$$\frac{1}{x_1 - x_3} + \frac{1}{x_2 - x_3} = \frac{x_1 + x_2 - 2x_3}{x_1 x_2 - x_3(x_1 + x_2) + x_3^2} = \frac{1 - 2x_3}{a - x_3 + x_3^2} = \frac{1 - 2x_3}{x_3 - 2a} = -2 + \frac{1 - 4a}{x_3 - 2a}$$

$$\text{Tương tự có được } S = -4 + (1 - 4a) \left(\frac{1}{x_3 - 2a} + \frac{1}{x_4 - 2a} \right)$$

$$= -4 + (1 - 4a) \frac{x_3 + x_4 - 4a}{(x_3 - 2a)(x_4 - 2a)} = -4 + (1 - 4a) \frac{2 - 4a}{a(4a - 1)} = -\frac{2}{a}.$$

Do đó để $S = \frac{1}{3}$ thì $a = -6$, thỏa mãn điều kiện $a < 0$.

b) Giả sử tồn tại x, y nguyên dương để $\frac{x^2 + x - 2}{y^2 + 2y} = p^2$ là bình phương số nguyên tố.

Suy ra $x^2 + x - 2 = p^2(y^2 + 2y)$ hay $(x - 1)(x + 2)$ chia hết cho p^2 .

Đặt $d = (x - 1, x + 2)$ thì $d \in \{1; 3\}$.

* Nếu $d = 1$ thì sẽ có hai khả năng:

- $x - 1$ chia hết cho p^2 . Đề ý $x \geq 2$ nên $x - 1 \geq p^2$.

Đặt $x - 1 = kp^2$ với k nguyên dương thì $x + 2 = kp^2 + 3$.

Thay vào phương trình có $k(kp^2 + 3) = y^2 + 2y$ hay $k^2 p^2 + 3k + 1 = (y + 1)^2$.

Có $(kp + 1)^2 - (k^2 p^2 + 3k + 1) = k(2p - 3) > 0$ nên $(kp)^2 < k^2 p^2 + 3k + 1 < (kp + 1)^2$.

Mà $k^2 p^2 + 3k + 1 = (y + 1)^2$ là số chính phương nên vô lý.

- $x + 2$ chia hết cho p^2 , đặt $x + 2 = kp^2$ với k nguyên dương.

Khi đó $x - 1 = kp^2 - 3$, và $kp^2 - 3 \geq 1$ do $p \geq 2$.

Thay vào phương trình có $k(kp^2 - 3) = y^2 + 2y$ hay $k^2 p^2 - 3k + 1 = (y + 1)^2$

Tương tự $(kp - 1)^2 < (y + 1)^2 < (kp)^2$ nên vô lý.

* Nếu $d = 3$ thì $x - 1$ và $x + 2$ chia hết cho 3.

- Nếu $p \neq 3$ thì p không thể đồng thời là ước của $x-1$ và $x+2$.

Do đó hoặc $x-1$ chia hết cho p^2 , hoặc $x+2$ chia hết cho p^2 , chứng minh tương tự trường hợp trên có được điều vô lý xảy ra.

- Nếu $p = 3$, khi đó $x-1 = 3a$, $x+2 = 3a+3$ với a nguyên dương.

Thay vào phương trình có được $9a(a+1) = 9y(y+2)$ hay $a^2 + a = y^2 + 2y$.

Do đó $(2y+2)^2 - (2a+1)^2 = 3$ hay $(2y-2a+1)(2y+2a+3) = 3$.

Để ý $2y+2a+3 > 2y-2a+1 > 0$ nên $2y+2a+3 = 3$ và $2y-2a+1 = 1$.

Khi đó $y = 0$, vô lý với việc y nguyên dương.

Vậy điều giả sử sai, do đó không tồn tại x, y nguyên dương thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài 5. (2,0 điểm)

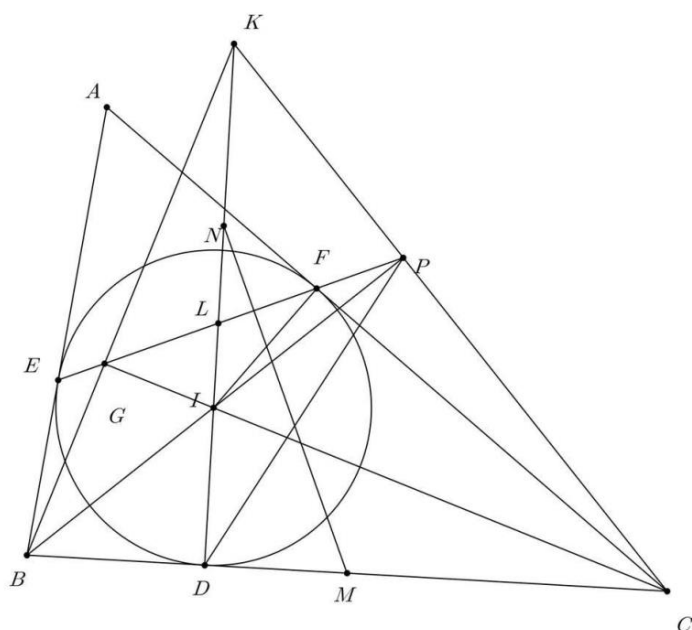
Cho tam giác ABC ($AB < AC < BC$), đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Gọi P là hình chiếu vuông góc của C lên đường thẳng BI .

a) Chứng minh rằng $2 \cdot \angle PIC + \angle BAC = 180^\circ$ và ba điểm P, E, F thẳng hàng.

b) Tia DI cắt các đường thẳng EF, PC lần lượt tại L, K . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các

đoạn thẳng BC, IK . Chứng minh rằng MN vuông góc với EF và $\frac{DI}{DN} + \frac{NL}{NI} = 1$.

Hướng dẫn giải



a) Ta có:
$$\angle BIC = 180^\circ - \frac{\angle ABC}{2} - \frac{\angle ACB}{2} = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}.$$

Suy ra
$$\angle PIC = 180^\circ - 90^\circ - \frac{\angle A}{2} = 90^\circ - \frac{\angle A}{2} \text{ nên } 2\angle PIC = 180^\circ - \angle BAC, \text{ do đó } 2\angle PIC + \angle BAC = 180^\circ.$$

Ta có $\angle IEC = \angle IPC = \angle IDC = 90^\circ$ suy ra I, E, P, C, D cùng thuộc đường tròn đường kính IC .

Do đó
$$\angle IEP = 180^\circ - \angle PCI = 180^\circ - \left(90^\circ - \angle PIC\right) = 90^\circ + \angle PIC = 180^\circ - \frac{\angle A}{2} = 180^\circ - \angle IEF$$

Suy ra P, E, F thẳng hàng.

b) Gọi CI cắt EF tại G .

Vì $\angle BGC = 90^\circ$, do đó I là trực tâm tam giác BKC .

Ta có $KGIP$ nội tiếp đường tròn đường kính KG tâm N .

Lại có $BGPC$ nội tiếp đường tròn đường kính BC tâm M .

Do đó MN là trung trực GP suy ra $MN \perp EF$.

Ta có: $\angle IPD = \angle ICD = \angle ICE = \angle IPE$

Suy ra PI là phân giác trong $\angle LPD$ và PK là phân giác ngoài $\angle IPD$ nên $\frac{IL}{ID} = \frac{KL}{KD} (*)$.

Ta cần chứng minh:
$$\frac{DI}{DN} = 1 - \frac{NL}{NI} = \frac{LI}{NI} = \frac{DI + LI}{DN + NK} = \frac{DL}{DK}.$$

Khi đó $DI \cdot DK = DN \cdot DL (= DG \cdot DP)$.

Các tích này có thể dễ dàng chứng minh bằng các cặp đồng dạng $\triangle DGB \sim \triangle DCP$ và $\triangle DLG \sim \triangle DPN$ (g.g)

Bài 6. (1,5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Dụng hình bình hành $ABDC$. Trên cung nhỏ BC của đường tròn (O) lấy điểm M sao cho tia DM nằm giữa tia DA và tia DC . Đường thẳng qua M , song song với đường thẳng AC , cắt cạnh AB tại P và đường thẳng qua M , song song với đường thẳng AB , cắt cạnh AC tại Q . Đường thẳng AD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác

APQ tại F (F khác A). Chứng minh rằng tam giác MBC đồng dạng tam giác PMA và AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MDF .

Hướng dẫn giải

Ta có $\angle APM = 180^\circ - \angle BPM = 180^\circ - \angle BAC = \angle BMC$ và $\angle PAM = \angle BCM$ nên $\triangle MBC \sim \triangle PMA$.

$$\text{Suy ra } \frac{MB}{PM} = \frac{MC}{PA} = \frac{BC}{MA} \text{ suy ra } MC \cdot AM = PA \cdot BC \text{ suy ra } MB \cdot AM = PM \cdot BC = AQ \cdot BC.$$

Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác $ABMC$ ta có: $AM \cdot BC = MB \cdot AC + MC \cdot AB$

$$\text{Suy ra } AM^2 \cdot BC = AB \cdot (MC \cdot AM) + AC \cdot (MB \cdot AM) = AB \cdot (AP \cdot BC) + AC \cdot (AQ \cdot BC)$$

$$\text{Do đó } AM^2 = AP \cdot AB + AC \cdot AQ \quad (1)$$

Ta có $\angle QP = \angle FAP = \angle DAB$ và $\angle FPQ = \angle FAQ = \angle BDA$ nên $\triangle FQP \sim \triangle BDA$ (g.g)

$$\frac{FQ}{BA} = \frac{FP}{BD} = \frac{PQ}{DA}$$

$$\frac{FQ}{AB} = \frac{FP}{AC} = \frac{PQ}{AD}$$

$$FQ = AB \cdot \frac{PQ}{AD}; FP = AC \cdot \frac{PQ}{AD}.$$

Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác $APFQ$ nội tiếp, ta có:

$$AF \cdot PQ = AP \cdot FQ + PF \cdot AQ = AP \cdot AB \cdot \frac{PQ}{AD} + AQ \cdot AC \cdot \frac{PQ}{AD}$$

$$AF \cdot AD = AP \cdot AB + AQ \cdot AC \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } AM^2 = AF \cdot AD$$

Do đó AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MDF .

Vậy tam giác MBC đồng dạng tam giác PMA và AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MDF .

--- HẾT ---