

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NGHỆ AN**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm 02 trang)

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 – 2027**

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 120 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1 (1,5 điểm).

a) Một trang trại trồng cà rốt và thử nghiệm một loại phân bón mới. Khi thu hoạch người ta đo chiều dài các củ cà rốt và thu được kết quả sau:

Chiều dài (cm)	[15;16)	[16;17)	[17;18)	[18;19)	[19;20)	[20;21)
Số củ cà rốt	8	17	30	26	14	5

Xác định tần số và tính tần số tương đối của nhóm [17; 18).

b) Một hộp chứa 5 tấm thẻ ghi các số 1; 2; 3; 4; 5 (mỗi tấm thẻ chỉ ghi một số). Bạn An rút ngẫu nhiên 1 tấm thẻ từ trong hộp. Tính xác suất để An rút được tấm thẻ ghi số chẵn.

Câu 2 (2,0 điểm).

a) Tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt{4} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} - \sqrt{49}$.

b) Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{1}{x-4} \right) \cdot \frac{2\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1}$, với $x \geq 0, x \neq 4$.

c) Cho hàm số $y = ax^2$. Tìm giá trị của a để đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $M(2;6)$.

Câu 3 (2,5 điểm).

a) Có hai nhóm học sinh cùng đến một cửa hàng để mua hoa quả. Nhóm thứ nhất mua 3 kg táo và 5 kg cam, tổng số tiền phải trả là 225 nghìn đồng. Nhóm thứ hai mua 4 kg táo và 2 kg cam, tổng số tiền phải trả là 160 nghìn đồng. Hãy tính giá tiền 1 kg táo và giá tiền 1 kg cam.

b) Một ô tô tải khởi hành từ thành phố A để đi đến thành phố B. Sau đó 36 phút, một ô tô con cũng xuất phát từ thành phố A để đi đến thành phố B trên cùng một tuyến đường với vận tốc lớn hơn vận tốc của ô tô tải là 15 km/h. Do vận tốc lớn hơn nên ô tô con đã đuổi kịp và đến thành phố B cùng lúc với ô tô tải. Giả thiết rằng vận tốc của mỗi xe là không đổi trên cả tuyến đường. Hãy tính vận tốc của mỗi xe, biết quãng đường giữa hai thành phố A và B là 154 km.

c) Cho phương trình $x^2 - 5x + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Không giải phương trình, tính giá trị

biểu thức $P = \frac{1}{2 + \sqrt{23x_1^2 - 1}} + \frac{3x_2^2 + 7}{5x_2 + 1}$.

Câu 4 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$) và nội tiếp đường tròn (O) .

Các đường cao AD, BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm của BC , đường kính AL của đường tròn (O) cắt ME tại N .

a) Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp.

b) Chứng minh $\widehat{BAD} = \widehat{LAC}$ và $AE \cdot AB = 2AN \cdot OM$.

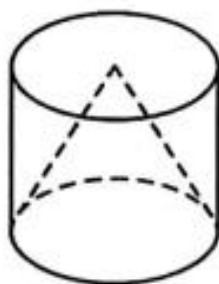
c) Tia AM cắt EF tại K . Gọi I là chân đường vuông góc hạ từ K xuống BC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADI cắt AB và AC tương ứng tại P và Q (P, Q khác A). Chứng minh K là trực tâm của tam giác APQ .

Câu 5 (1,0 điểm).

a) Quả bóng bàn sử dụng trong thi đấu quốc tế là loại bóng nhựa Poly cao cấp, thân thiện với môi trường, độ bền cao và có dạng hình cầu (hình vẽ). Biết rằng đường kính quả bóng bàn là 4 cm. Tính thể tích quả bóng bàn đó.



b) Người ta thiết kế một vật trang trí hình trụ bằng một loại chất liệu trong suốt, bên trong có một hình nón màu sắc rực rỡ. Biết rằng đỉnh hình nón là tâm đáy trên của hình trụ, đáy hình nón trùng với đáy dưới của hình trụ và đường sinh hình nón bằng 6 cm (tham khảo hình vẽ). Hãy tìm giá trị lớn nhất của thể tích vật trang trí đó.



..... **Hết**

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NGHỆ AN**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026-2027**

Môn thi: TOÁN

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 120 phút, không kể thời gian giao đề

(Đề thi gồm: 02 trang)

Câu 1 (1,5 điểm).

a) Một trang trại trồng cà rốt và thử nghiệm một loại phân bón mới. Khi thu hoạch người ta đo chiều dài các củ cà rốt và thu được kết quả như sau:

Chiều dài (cm)	[15; 16)	[16; 17)	[17; 18)	[18; 19)	[19; 20)	[20; 21)
Số củ cà rốt	8	17	30	26	14	5

Xác định tần số và tính tần số tương đối của nhóm [17; 18).

b) Một hộp chứa 5 tấm thẻ ghi các số 1; 2; 3; 4; 5 (mỗi tấm thẻ chỉ ghi một số). Bạn An rút ngẫu nhiên 1 tấm thẻ từ trong hộp. Tính xác suất để An rút được tấm thẻ ghi số chẵn.

Câu 2 (2,0 điểm).

a) Tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt{4} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} - \sqrt{49}$.

b) Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{1}{x-4} \right) \cdot \frac{2\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

c) Cho hàm số $y = ax^2$. Tìm giá trị của a để đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $M(2; 6)$.

Câu 3 (2,5 điểm).

a) Có hai nhóm học sinh cùng đến một cửa hàng để mua hoa quả. Nhóm thứ nhất mua 3 kg táo và 5 kg cam, tổng số tiền phải trả là 225 nghìn đồng. Nhóm thứ hai mua 4 kg táo và 2 kg cam, tổng số tiền phải trả là 160 nghìn đồng. Hãy tính giá tiền 1 kg táo và giá tiền 1 kg cam.

b) Một ô tô tải khởi hành từ thành phố A để đến thành phố B. Sau đó 36 phút, một ô tô con cũng xuất phát từ thành phố A để đi đến thành phố B trên cùng một tuyến đường với vận tốc lớn hơn vận tốc của ô tô tải là 15 km/h. Do vận tốc lớn hơn nên ô tô con đã đuổi kịp và đến thành phố B cùng lúc với ô tô tải. Giả thiết rằng vận tốc của mỗi xe là không đổi trên cả tuyến đường. Hãy tính vận tốc của mỗi xe, biết quãng đường giữa hai thành phố A và B là 154 km.

c) Cho phương trình $x^2 - 5x + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Không giải phương trình, tính giá trị

của biểu thức $P = \frac{1}{2 + \sqrt{23x_1^2 - 1}} + \frac{3x_2^2 + 7}{5x_2 + 1}$.

Câu 4 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$) và nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD , BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm của BC , đường kính AL của đường tròn (O) cắt ME tại N .

a) Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp.

b) Chứng minh $BAD = LAC$ và $AE \cdot AB = 2AN \cdot OM$.

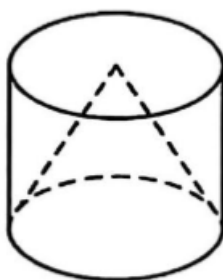
c) Tia AM cắt EF tại K . Gọi I là chân đường vuông góc hạ từ K xuống BC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADI cắt AB và AC tương ứng tại P và Q (P, Q khác A). Chứng minh K là trực tâm của tam giác APQ .

Câu 5 (1,0 điểm).

a) Quả bóng bàn sử dụng trong thi đấu quốc tế là loại bóng nhựa Poly cao cấp, thân thiện với môi trường, độ bền cao và có dạng hình cầu (hình vẽ). Biết rằng đường kính của quả bóng bàn là 4 cm. Tính thể tích của quả bóng bàn đó.



b) Người ta thiết kế một vật trang trí hình trụ bằng một loại chất liệu trong suốt, bên trong có một hình nón màu sắc rực rỡ. Biết rằng đỉnh hình nón là tâm đáy trên của hình trụ, đáy hình nón trùng với đáy dưới của hình trụ và đường sinh hình nón bằng 6 cm (tham khảo hình vẽ). Hãy tìm giá trị lớn nhất của thể tích vật trang trí đó.



-----HẾT-----

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm: 02 trang)

Thời gian làm bài: 120 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1 (1,5 điểm).

a) Một trang trại trồng cà rốt và thử nghiệm một loại phân bón mới. Khi thu hoạch người ta đo chiều dài các củ cà rốt và thu được kết quả như sau:

Chiều dài (cm)	[15; 16)	[16; 17)	[17; 18)	[18; 19)	[19; 20)	[20; 21)
Số củ cà rốt	8	17	30	26	14	5

Xác định tần số và tính tần số tương đối của nhóm [17; 18).

b) Một hộp chứa 5 tấm thẻ ghi các số 1; 2; 3; 4; 5 (mỗi tấm thẻ chỉ ghi một số). Bạn An rút ngẫu nhiên 1 tấm thẻ từ trong hộp. Tính xác suất để An rút được tấm thẻ ghi số chẵn.

Hướng dẫn giải

a) Từ bảng thống kê, tần số của nhóm [17; 18) là 30.

Tổng số củ cà rốt của trang trại là: $N = 8 + 17 + 30 + 26 + 14 + 5 = 100$ (củ).

Tần số tương đối của nhóm [17; 18) là: $f = \frac{30}{100} \cdot 100\% = 30\%$.

b) Phép thử ở đây là việc bạn An rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ hộp chứa 5 tấm thẻ ghi các số 1; 2; 3; 4; 5.

Không gian mẫu của phép thử là tập hợp các số ghi trên tấm thẻ có thể được rút ra: $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

Số phần tử của không gian mẫu là 5.

Đề bài nêu rõ An “rút ngẫu nhiên” 1 tấm thẻ từ trong hộp. Mỗi tấm thẻ có hình thức giống hệt nhau (chỉ khác số) và xác suất được chọn của mỗi tấm thẻ là như nhau. Do đó, kết quả có thể xảy ra của phép thử này là đồng khả năng.

Gọi biến cố A : “An rút được tấm thẻ ghi số chẵn”.

Kết quả thuận lợi cho biến cố A là tấm thẻ ghi số 2 hoặc số 4.

Do đó, có 2 kết quả thuận lợi cho biến cố A .

Xác suất để bạn An rút được tấm thẻ ghi số chẵn là tỉ số giữa kết quả thuận lợi cho biến cố A với số phần tử của không gian mẫu.

Do đó, $P(A) = \frac{2}{5}$.

Vậy xác suất để An rút được tấm thẻ ghi số chẵn là $\frac{2}{5}$.

Câu 2 (2,0 điểm).

a) Tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt{4} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} - \sqrt{49}$.

b) Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{1}{x-4} \right) \cdot \frac{2\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

c) Cho hàm số $y = ax^2$. Tìm giá trị của a để đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $M(2; 6)$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $A = \sqrt{4} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} - \sqrt{49}$

$$= 2 + \sqrt{3 \cdot 12} - 7$$

$$= 2 + \sqrt{36} - 7$$

$$= 2 + 6 - 7$$

$$= 1.$$

Vậy $A = 1$.

b) Ta có: $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{1}{x-4} \right) \cdot \frac{2\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{1}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \right] \cdot \frac{2\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \left[\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{1}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \right] \cdot \frac{2\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{\sqrt{x}+2-1}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{2\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{2(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x}+2}$$

Vậy $B = \frac{2}{\sqrt{x}+2}$, với $x \geq 0, x \neq 4$.

c) Thay $x = 2$ và $y = 6$ vào $y = ax^2$ được $2^2 \cdot a = 6$ hay $4a = 6$. Suy ra $a = \frac{3}{2}$.

Vậy $a = \frac{3}{2}$ thì đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $M(2; 6)$.

Câu 3 (2,5 điểm).

a) Có hai nhóm học sinh cùng đến một cửa hàng để mua hoa quả. Nhóm thứ nhất mua 3 kg táo và 5 kg cam, tổng số tiền phải trả là 225 nghìn đồng. Nhóm thứ hai mua 4 kg táo và 2 kg cam, tổng số tiền phải trả là 160 nghìn đồng. Hãy tính giá tiền 1 kg táo và giá tiền 1 kg cam.

b) Một ô tô tải khởi hành từ thành phố A để đến thành phố B. Sau đó 36 phút, một ô tô con cũng xuất phát từ thành phố A để đi đến thành phố B trên cùng một tuyến đường với vận tốc lớn hơn vận tốc của ô tô tải là 15 km/h. Do vận tốc lớn hơn nên ô tô con đã đuổi kịp và đến thành phố B cùng lúc với ô tô tải. Giả thiết rằng vận tốc của mỗi xe là không đổi trên cả tuyến đường. Hãy tính vận tốc của mỗi xe, biết quãng đường giữa hai thành phố A và B là 154 km.

c) Cho phương trình $x^2 - 5x + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{2 + \sqrt{23x_1^2 - 1}} + \frac{3x_2^2 + 7}{5x_2 + 1}$.

Hướng dẫn giải

a) Gọi x là giá tiền 1 kg táo (đơn vị: nghìn đồng), y là giá tiền 1 kg cam (đơn vị: nghìn đồng). Điều kiện $x, y > 0$.

Nhóm thứ nhất mua 3 kg táo và 5 kg cam, tổng số tiền phải trả là 225 nghìn đồng nên ta có phương trình: $3x + 5y = 225$ (1)

Nhóm thứ hai mua 4 kg táo và 2 kg cam, tổng số tiền phải trả là 160 nghìn đồng nên ta có phương trình: $4x + 2y = 160$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 3x + 5y = 225 \\ 4x + 2y = 160 \end{cases}$ hay $\begin{cases} 3x + 5y = 225 \\ 2x + y = 80 \end{cases}$, do đó $\begin{cases} 3x + 5y = 225 \\ y = 80 - 2x \end{cases}$

Thay $y = 80 - 2x$ vào phương trình (1) được:

$$3x + 5(80 - 2x) = 225$$

$$3x + 400 - 10x = 225$$

$$400 - 7x = 225$$

$$7x = 175$$

$$x = 25 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Khi đó, } y = 80 - 2 \cdot 25 = 30 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy giá 1 kg táo là 25 nghìn đồng, giá 1 kg cam là 30 nghìn đồng.

b) Gọi vận tốc của ô tô tải là x (km/h), điều kiện $x > 0$.

Vận tốc của ô tô con là $x + 15$ (km/h).

Thời gian ô tô tải đi quãng đường AB là $\frac{154}{x}$ (giờ)

Thời gian ô tô con đi quãng đường AB là $\frac{154}{x+15}$ (giờ)

Đổi 36 phút = 0,6 giờ.

Vì ô tô con xuất phát sau 36 phút (0,6 giờ) nhưng đến cùng lúc với ô tô tải nên ta có phương trình:

$$\frac{154}{x+15} + 0,6 = \frac{154}{x}$$

Giải phương trình, được: $\frac{154}{x} - \frac{154}{x+15} = 0,6$

$$154 \left(\frac{x+15}{(x+15)x} - \frac{x}{(x+15)x} \right) = 0,6$$

$$\frac{154 \cdot 15}{x(x+15)} = 0,6$$

$$(x^2 + 15x) \cdot 0,6 = 2\,310$$

$$0,6x^2 + 9x - 2\,310 = 0$$

$$x^2 + 15x - 3\,850 = 0$$

$$(x-55)(x+70) = 0$$

Vì $x > 0$ nên $x = 55$ thỏa mãn.

Khi đó, vận tốc ô tô con là $55 + 15 = 70$ (km/h).

Vậy vận tốc của ô tô tải là 55 km/h, vận tốc của ô tô con là 70 km/h.

c) Phương trình $x^2 - 5x + 1 = 0$ có $\Delta = (-5)^2 - 4 = 21 > 0$ nên có hai nghiệm phân biệt.

Theo hệ thức Viète, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$.

Vì x_1 là nghiệm của $x^2 - 5x + 1 = 0$ nên ta có $x_1^2 - 5x_1 + 1 = 0$ suy ra $x_1^2 = 5x_1 - 1$.

Tương tự với x_2 được $x_2^2 = 5x_2 - 1$.

Ta có: $(5x_1 - 1)^2 = 25x_1^2 - 10x_1 + 1 = (23x_1^2 - 1) + 2(x_1^2 - 5x_1 + 1) = 23x_1^2 - 1$

Do đó, $\sqrt{23x_1^2 - 1} = \sqrt{(5x_1 - 1)^2} = |5x_1 - 1| = 5x_1 - 1$ (do $5x_1 - 1 = x_1^2 \geq 0$).

Thay vào biểu thức P , được:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2 + \sqrt{23x_1^2 - 1}} + \frac{3x_2^2 + 7}{5x_2 + 1} \\ &= \frac{1}{2 + 5x_1 - 1} + \frac{3(5x_2 - 1) + 7}{5x_2 + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{5x_1+1} + \frac{15x_2+4}{5x_2+1} \\
&= \frac{1}{5x_1+1} + 3 + \frac{1}{5x_2+1} \\
&= \frac{5x_2+1+5x_1+1}{(5x_1+1)(5x_2+1)} + 3 \\
&= \frac{5(x_2+x_1)+2}{25x_2x_1+5(x_2+x_1)+1} + 3 \\
&= \frac{5 \cdot 5 + 2}{25 \cdot 1 + 5 \cdot 5 + 1} + 3 = \frac{60}{17} \\
\text{Vậy } P &= \frac{60}{17}.
\end{aligned}$$

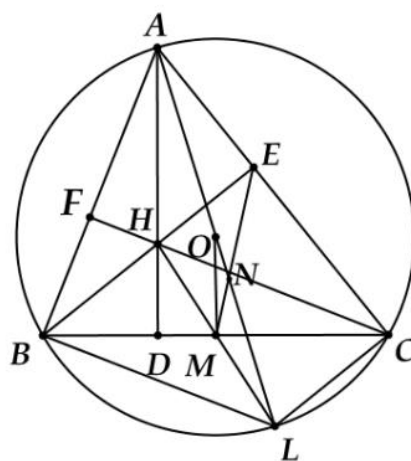
Câu 4 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$) và nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD , BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm của BC , đường kính AL của đường tròn (O) cắt ME tại N .

a) Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp.

b) Chứng minh $\angle BAD = \angle LAC$ và $AE \cdot AB = 2AN \cdot OM$.

c) Tia AM cắt EF tại K . Gọi I là chân đường vuông góc hạ từ K xuống BC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADI cắt AB và AC tương ứng tại P và Q (P, Q khác A). Chứng minh K là trực tâm của tam giác APQ .

Hướng dẫn giải



a) Vì CF , BE là các đường cao của tam giác ABC nên $\angle AEH = \angle AFH = 90^\circ$.

Tam giác AEH vuông tại E nên A, H, E cùng thuộc đường tròn đường kính AH (1).

Tam giác AFH vuông tại F nên A, H, F cùng thuộc đường tròn đường kính AH (2).

Từ (1), (2) suy ra A, H, E, F cùng thuộc đường tròn đường kính AH hay tứ giác $AEHF$ nội tiếp.

b) Ta có $BAD + ABD = 90^\circ$

$LAC + ALC = 90^\circ$ (do $\triangle ALC$ nội tiếp đường tròn (O) đường kính AL nên $\triangle ALC$ vuông tại C).

Mà $ABD = ALC$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC)

Do đó, $BAD = LAC$.

Ta có $BH \perp AC, LC \perp AC$ nên $BH \parallel CL$ (3)

Tương tự $CH \parallel BL$ (4).

Từ (3) và (4) ta suy ra $BHCL$ là hình bình hành.

Mà M là trung điểm BC nên M là trung điểm HL .

Do đó, H, M, L thẳng hàng.

Xét $\triangle AHL$ có M là trung điểm HL ; O là trung điểm AL .

Do đó, OM là đường trung bình của $\triangle AHL$.

Suy ra M là trung điểm $AH = 2OM$.

Ta có EM là trung tuyến của $\triangle BEC$ vuông tại E .

Do đó, $ME = MC$ hay $\triangle MEC$ cân tại M .

Suy ra $MEC = MCE$

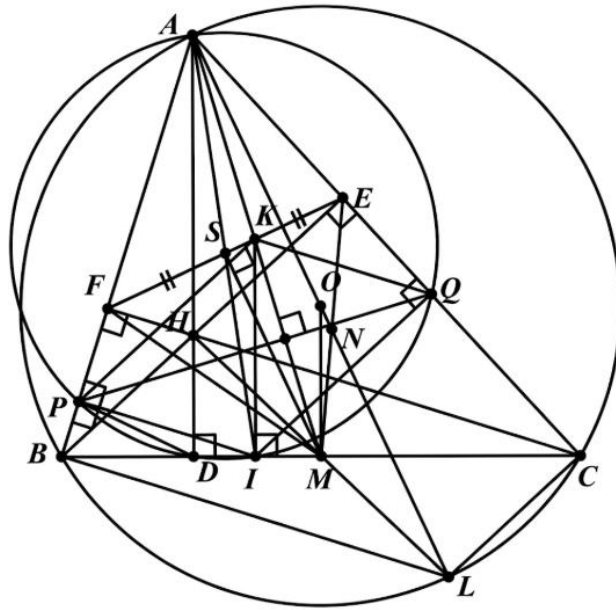
Mà $MCE + EBC = 90^\circ, HBD + BHD = 90^\circ$ nên $MEC = BHD$.

Khi đó $AEN = AHB$ (hai góc kề bù của cặp góc $MEC = BHD$)

Mà $BAH = NAE$ (chứng minh trên) nên $\triangle AHB \sim \triangle AEN$ (g.g)

Suy ra $\frac{AH}{AE} = \frac{AB}{AN}$, do đó $AE \cdot AB = AH \cdot AN = 2OM \cdot AN$ (đpcm)

c) Gọi S là trung điểm của EF .



Ta chứng minh được $BCEF$ nội tiếp

Suy ra $FEB = FCB$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BF)

Do đó, $AEF = ABC$ (cùng phụ với $FEB = FCB$)

Tương tự chứng minh được $AFE = ACB$.

Suy ra $\triangle AFE \sim \triangle ACB$ (g.g)

Do đó, $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$.

Vì S là trung điểm của EF , M là trung điểm của BC nên $\frac{EF}{BC} = \frac{2ES}{2BM} = \frac{2FS}{2CM}$ hay $\frac{ES}{BM} = \frac{FS}{CM}$.

Suy ra $\frac{AE}{AB} = \frac{ES}{BM}$

Suy ra $\triangle AES \sim \triangle ABM$ (c.g.c) vì có $\frac{AE}{AB} = \frac{ES}{BM}$ và $\angle AES = \angle ABM$ (cmt)

Do đó, $\angle ASE = \angle AMB$ (hai góc tương ứng) (*)

Có $ME = MF = \frac{1}{2}BC$ nên $\triangle MEF$ cân tại M .

Lại có S là trung điểm của EF nên $EF \perp MS$.

Do đó, $\angle MSK = 90^\circ$, $\angle MIK = 90^\circ$.

Từ đây, chứng minh được $MISK$ nội tiếp.

Do đó, $\angle AMB + \angle ISK = 180^\circ$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $\angle ASE + \angle ISK = 180^\circ$ hay $\angle ASI = 180^\circ$.

Suy ra A, S, I thẳng hàng

Mặt khác $\frac{AF}{AC} = \frac{FS}{CM}$, suy ra chứng minh được $\triangle AFS \sim \triangle ACM$ (c.g.c)

Suy ra $FAS = CAM$ (hai góc tương ứng) hay $BAI = EAK$

Do đó, $\triangle EAK \sim \triangle ABI$ (g.g) suy ra $\frac{AK}{AI} = \frac{EK}{BI}$.

Lại có $\triangle AFK \sim \triangle ACI$ (g.g) nên $\frac{AK}{AI} = \frac{FK}{CI}$.

Suy ra $\frac{FK}{CI} = \frac{EK}{BI}$ hay $\frac{EK}{FK} = \frac{BI}{CI}$ (***)

Ta có: $API = AQI = 90^\circ$ nên $IP \perp AP, QI \perp AQ$.

Mà $IP \parallel CF, IQ \parallel BE$ nên theo định lí Thales, có $\frac{BP}{PF} = \frac{BI}{CI}$ và $\frac{QE}{QC} = \frac{BI}{CI}$ (****)

Từ (***) và (****) suy ra $\frac{EK}{FK} = \frac{QE}{QC}$ hay $\frac{BP}{PF} = \frac{EK}{FK}$.

Theo định lí Thales đảo $QK \parallel CF, PK \parallel BE$.

Suy ra $QK \perp AP, PK \perp AQ$.

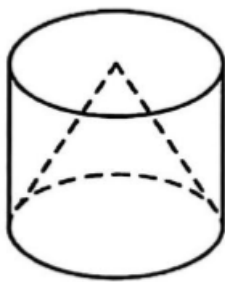
Do đó, K là trực tâm của tam giác APQ .

Câu 5 (1,0 điểm).

a) Quả bóng bàn sử dụng trong thi đấu quốc tế là loại bóng nhựa Poly cao cấp, thân thiện với môi trường, độ bền cao và có dạng hình cầu (hình vẽ). Biết rằng đường kính của quả bóng bàn là 4 cm. Tính thể tích của quả bóng bàn đó.



b) Người ta thiết kế một vật trang trí hình trụ bằng một loại chất liệu trong suốt, bên trong có một hình nón màu sắc rực rỡ. Biết rằng đỉnh hình nón là tâm đáy trên của hình trụ, đáy hình nón trùng với đáy dưới của hình trụ và đường sinh hình nón bằng 6 cm (tham khảo hình vẽ). Hãy tìm giá trị lớn nhất của thể tích vật trang trí đó.



Hướng dẫn giải

a) Bán kính của quả bóng bán hình cầu là: $R = \frac{d}{2} = \frac{4}{2} = 2$ (cm)

Thể tích của quả bóng bán là: $V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 2^3 = \frac{32}{3} \pi \approx 33,51$ (cm³).

b) Gọi bán kính đáy của hình trụ (cũng là của hình nón) là R (cm), với $0 < R < 6$.

Gọi chiều cao của hình trụ (cũng là chiều cao của hình nón) là h (cm), với $0 < h < 6$.

Xét hình nón, theo định lý Pythagore ta có mối liên hệ giữa đường sinh l , bán kính R và chiều cao h như sau: $R^2 + h^2 = l^2$, do đó $R^2 = 36 - h^2$.

Thể tích của vật trang trí hình trụ là: $V_{tru} = \pi R^2 h = \pi (36 - h^2) h$

$$V_{tru}^2 = \pi^2 (36 - h^2)^2 h^2$$

$$V_{tru}^2 = \frac{1}{2} \pi^2 (36 - h^2) \cdot (36 - h^2) \cdot 2h^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương là $(36 - h^2)$, $(36 - h^2)$, $2h^2$ được:

$$(36 - h^2) \cdot (36 - h^2) \cdot 2h^2 \leq \left(\frac{36 - h^2 + 36 - h^2 + 2h^2}{3} \right)^3$$

$$(36 - h^2) \cdot (36 - h^2) \cdot 2h^2 \leq 24^3$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{2} \pi^2 (36 - h^2) \cdot (36 - h^2) \cdot 2h^2 \leq \frac{1}{2} \pi^2 \cdot 24^3$$

$$V_{tru}^2 \leq 6\,912\pi^2$$

$$\text{Suy ra } V_{tru} \leq \sqrt{6\,912\pi^2} = 48\pi\sqrt{3}.$$

Dấu “=” xảy ra khi $36 - h^2 = 2h^2$ suy ra $h = 2\sqrt{3}$ (cm) (thỏa mãn)

Khi đó $R = \sqrt{36 - h^2} = 2\sqrt{6}$ (cm).

Vậy giá trị lớn nhất của thể tích vật trang trí là $48\pi\sqrt{3}$ (cm³).

-----HẾT-----