

I- PHẦN GHI KẾT QUẢ (3 điểm) (Thí sinh chỉ cần ghi kết quả vào tờ giấy thi. Mỗi câu trả lời đúng 0,25 điểm).

Câu 1. Cho các số thực a, b thỏa mãn $\frac{13}{3\sqrt{7} + \sqrt{11}} + \frac{17}{4\sqrt{7} + 2\sqrt{11}} = a\sqrt{7} + b\sqrt{11}$. Giá trị $a + b$ bằng bao nhiêu?

Câu 2. Cho các số thực a, b thỏa mãn $a - b = 3$. Giá trị của biểu thức $A = a^2(a+1) - b^2(b-1) - 11ab + 6$ bằng bao nhiêu?

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m+1)x + (m-2)^3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó một nghiệm bằng bình phương nghiệm còn lại.

Câu 4. Tìm tất cả các số nguyên x sao cho giá trị của biểu thức $x^2 - x + 6$ là một số chính phương.

Câu 5. Cho đa thức $P(x) = 4x^3 + ax + b$. Biết rằng $P(x)$ chia hết cho các đa thức $x-2$ và $x+1$. Giá trị của $M = 2a - 5b$ bằng bao nhiêu?

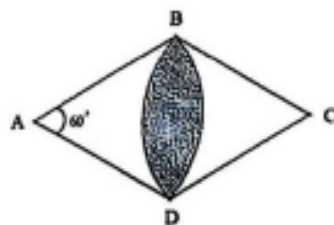
Câu 6. Cho α là góc nhọn thỏa mãn $\sin \alpha - 3 \cos \alpha = 0$. Giá trị của biểu thức $A = \frac{\sin^3 \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha + 3 \cos^3 \alpha}$ bằng bao nhiêu?

Câu 7. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH (H thuộc cạnh BC). Biết rằng $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$ và $BC = 15 \text{ cm}$. Độ dài đoạn thẳng CH bằng bao nhiêu?

Câu 8. Cho đường thẳng $(d): y = ax + b$ đi qua điểm $I(1; 2)$. Tìm các số thực dương a, b để đường thẳng (d) cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho tam giác OAB cân.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y = 2mx + m^2 - m - 5$ cắt parabol $(P): y = x^2$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho ba điểm A, B và $C(1; -3)$ thẳng hàng.

Câu 10. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng 6 cm , góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$ lấy điểm A và điểm C làm tâm, vẽ các cung tròn có cùng bán kính bằng 6 cm . Diện tích phần tô đậm giới hạn bởi hai cung tròn bằng bao nhiêu? (Hình vẽ bên).



Câu 11. Một bể cá cảnh hình trụ có bán kính đáy bằng 20 cm , người ta cho vào bể cá một viên đá trang trí thì thấy mức nước trong bể cá dâng lên 2 cm . Hỏi viên đá cảnh đó có thể tích bằng bao nhiêu?

Câu 12. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số $0; 1; 2; 3; 4$. Lấy ngẫu nhiên một số thuộc tập S . Tính xác suất để số lấy được chia hết cho 3.

II- PHẦN TỰ LUẬN (7 điểm) (Thí sinh trình bày lời giải vào tờ giấy thi).

Câu 13 (2 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = x^2 + x - 3$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2xy - 6y = 1 \\ x(2x^2 - x - 2) - x^2y - 5y = -1. \end{cases}$$

Câu 14 (1 điểm). Tìm tất cả cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn $2^x \cdot y^2 = 36x^2 + 12x + 16$.

Câu 15 (2 điểm). Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M nằm ngoài đường tròn. Gọi A là giao điểm của MO và đường tròn $(O; R)$ (A nằm giữa M và O), từ điểm M vẽ đường thẳng cắt đường tròn $(O; R)$ tại hai điểm phân biệt N và P (N nằm giữa M và P , N khác A), đường thẳng đi qua N và vuông góc với MP cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn $(O; R)$ tại điểm I . Vẽ tiếp tuyến IB với đường tròn $(O; R)$ (tiếp điểm B khác A và P). Gọi F là giao điểm của đường thẳng MP và đường thẳng OB .

a) Chứng minh $MN \cdot MP = MO^2 - R^2$ và $\triangle MIF$ đồng dạng $\triangle BNA$.

b) Gọi (O') đường tròn ngoại tiếp tam giác MIF (tâm O' khác O), đường thẳng OO' cắt MP tại J . Chứng minh IO' vuông góc với IJ .

Câu 16 (1 điểm). Cho a, b, c là 3 số thực dương và thỏa mãn $abc = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P = \frac{a^2 + 1}{(a+1)^2} + \frac{b^2 + 1}{(b+1)^2} + \frac{c^2 + 1}{(c+1)^2} + \frac{1}{ab + bc + ca + 1}.$$

Câu 17 (1 điểm).

a) Cho a, b là hai số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu $a \geq 2$ thì giá trị của biểu thức $P = a^2b^2 - 2a - b$ không phải là một số chính phương.

b) Cắt một tờ giấy hình chữ nhật theo một đường thẳng, được hai mảnh. Lấy một trong các mảnh đó, cắt theo một đường thẳng được hai mảnh, và làm tiếp như vậy nhiều lần. Hỏi cần phải cắt ít nhất bao nhiêu lần để được 16 hình lục giác?

— HẾT —

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu.

- Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:SBD:

SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
HÀ TĨNH

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÀ TĨNH

NĂM HỌC 2026 - 2027

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN

(Đề thi có 2 trang, gồm 17 câu)

Thời gian làm bài: 150 phút

I- PHẦN GHI KẾT QUẢ (3 điểm) (Thí sinh chỉ cần ghi kết quả vào tờ giấy thi. Mỗi câu trả lời đúng 0,25 điểm)

Câu 1. Cho các số thực a, b thỏa mãn $\frac{13}{3\sqrt{7} + \sqrt{11}} + \frac{17}{4\sqrt{7} + 2\sqrt{11}} = a\sqrt{7} + b\sqrt{11}$. Giá trị $a + b$ bằng bao nhiêu?

Câu 2. Cho các số thực a, b thỏa mãn $a - b = 3$. Giá trị của biểu thức $A = a^2(a + 1) - b^2(b - 1) - 11ab + 6$ bằng bao nhiêu?

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + (m - 2)^3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó một nghiệm bằng bình phương nghiệm còn lại.

Câu 4. Tìm tất cả các số nguyên x sao cho giá trị của biểu thức $x^2 - x + 6$ là một số chính phương.

Câu 5. Cho đa thức $P(x) = 4x^3 + ax + b$. Biết rằng $P(x)$ chia hết cho các đa thức $x - 2$ và $x + 1$. Giá trị của $M = 2a - 5b$ bằng bao nhiêu?

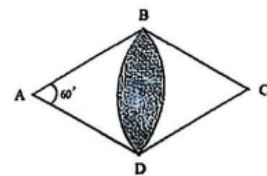
Câu 6. Cho α là góc nhọn thỏa mãn $\sin \alpha - 3 \cos \alpha = 0$. Giá trị của biểu thức $A = \frac{\sin^3 \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha + 3 \cos^3 \alpha}$ bằng bao nhiêu?

Câu 7. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH (H thuộc cạnh BC). Biết rằng $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$ và $BC = 15$ cm. Độ dài đoạn thẳng CH bằng bao nhiêu?

Câu 8. Cho đường thẳng $(d): y = ax + b$ đi qua điểm $I(1; 2)$. Tìm các số thực dương a, b để đường thẳng (d) cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho tam giác OAB cân.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y = 2mx + m^2 - m - 5$ cắt parabol $(P): y = x^2$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho ba điểm A, B và $C(1; -3)$ thẳng hàng.

Câu 10. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng 6 cm, góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$



lấy điểm A và điểm C làm tâm, vẽ các cung tròn có cùng bán kính bằng 6 cm. Diện tích phần tô đậm giới hạn bởi hai cung tròn bằng bao nhiêu? (Hình vẽ bên)

Câu 11. Một bể cá cảnh hình trụ có bán kính đáy bằng 20 cm, người ta cho vào bể cá một viên đá trang trí thì thấy mức nước trong bể cá dâng lên 2 cm. Hỏi viên đá cảnh đó có thể tích bằng bao nhiêu?

Câu 12. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4. Lấy ngẫu nhiên một số thuộc tập S . Tính xác suất để số lấy được chia hết cho 3.

II- PHẦN TỰ LUẬN (7 điểm) (Thí sinh trình bày lời giải vào tờ giấy thi)

Câu 13 (2 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = x^2 + x - 3$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2xy - 6y = 1 \\ x(2x^2 - x - 2) - x^2y - 5y = 1 \end{cases}$$

Câu 14 (1 điểm). Tìm tất cả cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn $2^y \cdot y^2 = 36x^2 + 12x + 16$.

Câu 15 (2 điểm). Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M nằm ngoài đường tròn. Gọi A là giao điểm của MO và đường tròn $(O; R)$ (A nằm giữa M và O), từ điểm M vẽ đường thẳng cắt đường tròn $(O; R)$ tại hai điểm phân biệt N và P (N nằm giữa M và P , N khác A), đường thẳng đi qua N và vuông góc với MP cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn $(O; R)$ tại điểm I . Vẽ tiếp tuyến IB với đường tròn $(O; R)$ (tiếp điểm B khác A và P). Gọi F là giao điểm của đường thẳng MP và đường thẳng OB .

a) Chứng minh $MN \cdot MP = MO^2 - R^2$ và $\triangle MIF$ đồng dạng $\triangle BNA$.

b) Gọi (O') đường tròn ngoại tiếp tam giác MIF (tâm O' khác O), đường thẳng OO' cắt MP tại J . Chứng minh IO' vuông góc với IJ .

Câu 16 (1 điểm). Cho a, b, c là 3 số thực dương và thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức
$$P = \frac{a^2 + 1}{(a+1)^2} + \frac{b^2 + 1}{(b+1)^2} + \frac{c^2 + 1}{(c+1)^2} + \frac{1}{ab + bc + ca + 1}.$$

Câu 17 (1 điểm).

a) Cho a, b là hai số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu $a \geq 2$ thì giá trị của biểu thức

$$P = a^2b^2 - 2a - b \text{ không phải là một số chính phương.}$$

b) Cắt một tờ giấy hình chữ nhật theo một đường thẳng, được hai mảnh. Lấy một trong hai mảnh đó, cắt theo một đường thẳng được hai mảnh, và làm tiếp như vậy nhiều lần. Hỏi cần phải cắt ít nhất bao nhiêu lần để được 16 hình lục giác?

-----**HẾT**-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu.

- Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....SBD.....

SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
HÀ TĨNH

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÀ TĨNH
NĂM HỌC 2026 - 2027

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN

(Đề thi có 2 trang, gồm 17 câu)

Thời gian làm bài: 150 phút

I- PHẦN GHI KẾT QUẢ (3 điểm) (Thí sinh chỉ cần ghi kết quả vào tờ giấy thi. Mỗi câu trả lời đúng 0,25 điểm)

Câu 1. Cho các số thực a, b thỏa mãn $\frac{13}{3\sqrt{7} + \sqrt{11}} + \frac{17}{4\sqrt{7} + 2\sqrt{11}} = a\sqrt{7} + b\sqrt{11}$. Giá trị $a + b$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Ta có:
$$\frac{13}{3\sqrt{7} + \sqrt{11}} = \frac{13(3\sqrt{7} - \sqrt{11})}{(3\sqrt{7})^2 - (\sqrt{11})^2} = \frac{13(\sqrt{7} - \sqrt{11})}{63 - 11} = \frac{3}{4}\sqrt{7} - \frac{1}{4}\sqrt{11}$$

$$\frac{17}{4\sqrt{7} + 2\sqrt{11}} = \frac{17(4\sqrt{7} - 2\sqrt{11})}{(4\sqrt{7})^2 - (2\sqrt{11})^2} = \frac{17(4\sqrt{7} - 2\sqrt{11})}{112 - 44} = \sqrt{7} - \frac{1}{2}\sqrt{11}$$

Do đó,
$$VT = \frac{7}{4}\sqrt{7} - \frac{3}{4}\sqrt{11} \text{ nên } a + b = 1.$$

Câu 2. Cho các số thực a, b thỏa mãn $a - b = 3$. Giá trị của biểu thức $A = a^2(a + 1) - b^2(b - 1) - 11ab + 6$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Ta có:
$$A = a^2(a + 1) - b^2(b - 1) - 11ab + 6$$

$$= a^3 - b^3 + a^2 + b^2 - 11ab + 6$$

$$= (a - b) \left[(a - b)^2 + 3ab \right] + (a - b)^2 + 2ab - 11ab + 6$$

$$= 27 + 9ab + 9 + 2ab - 11ab + 6$$

$$= 42.$$

Vậy $A = 42$.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m+1)x + (m-2)^3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó một nghiệm bằng bình phương nghiệm còn lại.

Hướng dẫn giải

Xét phương trình bậc hai $x^2 - 2(m+1)x + (m-2)^3 = 0$ (1).

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 điều kiện là $\Delta' = (m+1)^2 - (m-2)^3 > 0$ (*)

Áp dụng định lí Viète:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 x_2 = (m-2)^3 \end{cases}$$

Giả sử nghiệm này bằng bình phương nghiệm kia $x_2 = x_1^2$.

Khi đó $x_1 x_1^2 = x_1^3 = (m-2)^3$ nên $x_1 = m-2$ suy ra $x_2 = (m-2)^2$.

Thế cặp nghiệm này vào phương trình $x_1 + x_2 = 2(m+1)$.

Suy ra $(m-2) + (m-2)^2 = 2(m+1)$

Do đó, $m^2 - 3m + 2 = 2m + 2$

$$m^2 - 5m = 0$$

Suy ra $m(m-5) = 0$ hay $m = 0$ hoặc $m = 5$.

Thử lại thấy thỏa mãn, vậy $m \in \{0; 5\}$.

Câu 4. Tìm tất cả các số nguyên x sao cho giá trị của biểu thức $x^2 - x + 6$ là một số chính phương.

Hướng dẫn giải

Đặt $x^2 - x + 6 = a^2$ ($a \geq 0$).

Ta có: $x^2 - x + 6 = a^2$, suy ra $4x^2 - 4x + 1 + 23 = (2a)^2$

Suy ra $(2a)^2 - (2x-1)^2 = 23$

$$(2a - 2x + 1)(2a + 2x - 1) = 23$$

Đến đây, ta có các trường hợp sau:

	TH1	TH2	TH3	TH4
--	-----	-----	-----	-----

$2a - 2x + 1$	1	23	-1	-23
$2a + 2x - 1$	23	1	-23	-1
a	6	6	-6	-6
b	6	-5	-5	6

Vậy $x \in \{-5, 6\}$ thỏa mãn đề bài

Câu 5. Cho đa thức $P(x) = 4x^3 + ax + b$. Biết rằng $P(x)$ chia hết cho các đa thức $x - 2$ và $x + 1$. Giá trị của $M = 2a - 5b$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Ta có: $x = 2$ và $x = -1$ là nghiệm của $P(x)$, suy ra $\begin{cases} 32 + 2a + b = 0 \\ -4 - a + b = 0 \end{cases}$, do đó $\begin{cases} a = -12 \\ b = -8 \end{cases}$.

Do đó $2a - 5b = 16$

Câu 6. Cho α là góc nhọn thỏa mãn $\sin \alpha - 3 \cos \alpha = 0$. Giá trị của biểu thức $A = \frac{\sin^3 \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha + 3 \cos^3 \alpha}$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Vì α là góc nhọn nên $\sin \alpha, \cos \alpha > 0$.

Ta có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 10 \cos^2 \alpha = 1$.

Suy ra $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}; \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Thay vào biểu thức $A = \frac{\sin^3 \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha + 3 \cos^3 \alpha}$ được $A = \frac{37}{35}$.

Câu 7. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH (H thuộc cạnh BC). Biết rằng $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$ và $BC = 15$ cm. Độ dài đoạn thẳng CH bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Theo định lý Pythagore, ta có $AB^2 + AC^2 = BC^2 = 15^2$, suy ra $AB = 9, AC = 12$.

Để thấy $\triangle AHC \sim \triangle BAC$, suy ra $AC^2 = CH \cdot BC$ do đó $CH = \frac{48}{5}$.

Câu 8. Cho đường thẳng $(d): y = ax + b$ đi qua điểm $I(1; 2)$. Tìm các số thực dương a, b để đường thẳng (d) cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho tam giác OAB cân.

Hướng dẫn giải

Yêu cầu bài toán tương đương tìm a, b thỏa mãn $a + b = 2$ và $a = 1$.

Do đó, $a = b = 1$.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y = 2mx + m^2 - m - 5$ cắt parabol $(P): y = x^2$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho ba điểm A, B và $C(1; -3)$ thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

Yêu cầu bài toán tương đương tìm m sao cho (d) đi qua $C(1; -3)$ và (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt. Vì đường thẳng (d) đi qua $C(1; -3)$ nên ta có $2m + m^2 - m - 5 = -3$, do đó $m \in \{-2; 1\}$.

Đến đây, ta xét trường hợp:

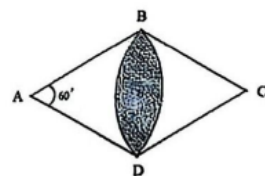
TH1: $m = 1$ đường thẳng (d) trở thành $y = 2x - 5$. Ta có $x^2 \geq 2x - 1 > 2x - 5$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, do đó đường thẳng (d) không cắt (P) .

TH2: $m = -2$ đường thẳng (d) trở thành $y = -4x + 1$, Trong trường hợp này, (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt A, B .

Vậy $m = -2$ thỏa mãn.

Câu 10. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng 6 cm, góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$

lấy điểm A và điểm C làm tâm, vẽ các cung tròn có cùng bán kính bằng 6 cm. Diện tích phần tô đậm giới hạn bởi hai cung tròn bằng bao nhiêu? (Hình vẽ bên)



Hướng dẫn giải

$$S = 2 \left(\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 6^2 - \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} \right) = 12\pi - 18\sqrt{3}$$

Ta có diện tích phần tô đậm là (đvdt)

Câu 11. Một bể cá cảnh hình trụ có bán kính đáy bằng 20 cm, người ta cho vào bể cá một viên đá trang trí thì thấy mức nước trong bể cá dâng lên 2 cm. Hỏi viên đá cảnh đó có thể tích bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Thể tích phần nước dâng lên bằng đúng thể tích của viên đá cảnh. Do đó, ta có thể tích của viên đá cảnh là $V = \pi \cdot 20^2 \cdot 2 = 800\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.

Câu 12. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4. Lấy ngẫu nhiên một số thuộc tập S . Tính xác suất để số lấy được chia hết cho 3.

Hướng dẫn giải

Do các số nằm trong tập S nên $|S| = 4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$.

Giả sử số được chọn ra là $n = \overline{abc}$, gọi A là biến cố n chia hết cho 3.

Do $1+2+4=7$ không chia hết cho 3, suy ra trong a, b, c phải có một số chia hết cho 3. Mặt khác, do chỉ có đúng 2 số chia hết cho 3 trong tập $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ nên trong ba số a, b, c chỉ được có duy nhất một số chia hết cho 3. Hai chữ số còn lại của số n chỉ có thể là 1, 2 hoặc 2, 4.

Do đó, số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 20$.

Vậy xác suất cần tìm là $\frac{20}{48} = \frac{5}{12}$.

II- PHẦN TỰ LUẬN (7 điểm) (Thí sinh trình bày lời giải vào tờ giấy thi)

Câu 13 (2 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = x^2 + x - 3$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2xy - 6y = 1 \\ x(2x^2 - x - 2) - x^2y - 5y = 1 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $x \geq 1$. Ta có:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = x^2 + x - 3$$

$$(\sqrt{x-1} - 1) + (\sqrt{x+2} - 2) = x^2 + x - 6$$

$$\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2} = (x-2)(x+3)$$

$$(x-2) \left[x+3 - \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} - \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} \right] = 0$$

$$\forall x \geq 1 \text{ nên } x+3 - \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} - \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} \geq 1+3 - \frac{1}{\sqrt{1-1}+1} - \frac{1}{\sqrt{1+2}+2} > 0$$

Do đó, phương trình có nghiệm $x = 2$ (thỏa mãn).

b) Phương trình (1) đã cho tương đương với: $(x^2 - 1) = y(y - 2x + 6)$

Từ phương trình (2), ta có: $x(2x^2 - x - 2) - x^2y - 5y = -1$

$$x^2(2x-1) - (2x-1) - y(x^2-1+6) = 0$$

$$(2x-1)(x^2-1) - y(x^2-1) - 6y = 0$$

$$y[(y-2x+6)(2x-1-y)-6] = 0$$

Với $y = 0$, ta có $x = 1$ hoặc $x = -1$. Vậy hệ có hai nghiệm $(1; 0)$ và $(-1; 0)$.

Với $(y-2x+6)(2x-1-y)-6 = 0$, đặt $t = y-2x$, khi đó;

$$(t+6)[- (t+1)] - 6 = 0$$

$$-t^2 - 7t - 12 = 0, \text{ do đó, } t = -3 \text{ hoặc } t = -4.$$

Với $t = -3$ thì $y = 2x - 3$, suy ra $x^2 - 1 = (2x - 3)(2x - 3 - 2x + 6)$

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \text{ suy ra } x = 2 \text{ hoặc } x = 4.$$

Khi đó, hệ có nghiệm $(2; 1)$ và $(4; 5)$.

Với $t = -4$ thì $y = 2x - 4$, ta có:

$$x^2 - 1 = (2x - 4)(2x - 4 - 2x + 6) \text{ suy ra } x^2 - 4x + 7 = 0.$$

Phương trình này vô nghiệm nên không có cặp $(x; y)$ thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $S = \{(1; 0); (-1; 0); (2; 1); (4; 5)\}$.

Câu 14 (1 điểm). Tìm tất cả cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn $2^y \cdot y^2 = 36x^2 + 12x + 16$.

Hướng dẫn giải

Xét modulo 3 ta có $2^y y^2 \equiv 1 \pmod{3}$

Nếu $y \not\equiv 3$ từ đó $2^y y^2 \equiv 0 \pmod{3}$, vô lí.

Nếu $y \equiv 3$ từ đó $2^y y^2 \equiv (-1)^y \pmod{3}$ nên y chẵn.

Từ đó $2^y y^2$ là số chính phương nên $36x^2 + 12x + 16$ là số chính phương.

Với $x = 0$ thì $2^y y^2 = 16$ nên $y = 2$.

Với $x = 1$ thì $2^y y^2 = 64$, không tồn tại y .

Xét $x \geq 2$ thì $(6x+1)^2 < 36x^2 + 12x + 16 < (6x+2)^2$, vô lí.

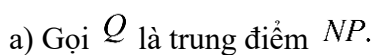
vậy tất cả giá trị cần tìm là $(x, y) = (0, 2)$.

Câu 15 (2 điểm). Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M nằm ngoài đường tròn. Gọi A là giao điểm của MO và đường tròn $(O; R)$ (A nằm giữa M và O), từ điểm M vẽ đường thẳng cắt đường tròn $(O; R)$ tại hai điểm phân biệt N và P (N nằm giữa M và P , N khác A), đường thẳng đi qua N và vuông góc với MP cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn $(O; R)$ tại điểm I . Vẽ tiếp tuyến IB với đường tròn $(O; R)$ (tiếp điểm B khác A và P). Gọi F là giao điểm của đường thẳng MP và đường thẳng OB .

a) Chứng minh $MN \cdot MP = MO^2 - R^2$ và $\triangle MIF$ đồng dạng $\triangle BNA$.

b) Gọi (O') đường tròn ngoại tiếp tam giác MIF (tâm O' khác O), đường thẳng OO' cắt MP tại J . Chứng minh IO' vuông góc với IJ .

Hướng dẫn giải



Ta có: $MN \cdot MP = (MQ - NQ)(MQ + PQ) = (MQ - NQ)(MQ + NQ)$

$$=MQ^2 - NQ^2 = MO^2 - OQ^2 - NQ^2 = MO^2 - ON^2 = MO^2 - R^2$$

Do tứ giác $MINA$ nội tiếp đường tròn đường kính MI nên $\widehat{IMA} = \widehat{INA} = \widehat{NBA}$.

Do tứ giác $IBFN$ nội tiếp đường tròn đường kính IF nên $\widehat{IFM} = \widehat{IBN} = \widehat{BAN}$.

Suy ra tứ giác $\Delta MIF \sim \Delta BNA$ (g.g)

b) Ta có: $\widehat{MO'F} = 360^\circ - 2\widehat{MIB} = 360^\circ - 2\widehat{ANB} = \widehat{AOB}$ suy ra $\widehat{MO'F} = \widehat{MOF}$.

Do đó, $MO'OF$ nội tiếp có $O'M = O'F$ nên OO' là phân giác ngoài góc $\widehat{MOF}$, suy ra $OI \perp OO'$.

Tương tự ý 1, ta có $JO \cdot JO' = JM \cdot JF = O'J^2 - O'I^2$ suy ra $(O'J - OO') \cdot JO' = O'J^2 - O'I^2$.

Suy ra $O'I^2 = O'O \cdot O'J$ mà $\angle IOO' = 90^\circ$ nên $\angle OIJ = 90^\circ$.

Suy ra $IO' \perp IJ$.

Câu 16 (1 điểm). Cho a, b, c là 3 số thực dương và thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$P = \frac{a^2+1}{(a+1)^2} + \frac{b^2+1}{(b+1)^2} + \frac{c^2+1}{(c+1)^2} + \frac{1}{ab+bc+ca+1}$$

Hướng dẫn giải

Trước tiên, ta chứng minh rằng với mọi số thực $x > 0$, ta luôn có:

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2} \geq \frac{1}{2} \quad \text{suy ra} \quad 2(x^2+1) \geq (x+1)^2 \quad \text{do đó} \quad (x-1)^2 \geq 0 \quad (\text{luôn đúng}).$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x=1$. Áp dụng bất đẳng thức trên, ta có:

$$\frac{a^2+1}{(a+1)^2} + \frac{b^2+1}{(b+1)^2} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Tiếp theo, xét ba số $a-1, b-1, c-1$. Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất hai số cùng dấu.

Không làm mất tính tổng quát, giả sử rằng hai số đó là $a-1$ và $b-1$.

Khi đó: $(a-1)(b-1) \geq 0$, suy ra $a+b \leq ab+1$, do đó $c(a+b) \leq c(ab+1)$.

Suy ra $ab+bc+ac+1 \leq (ab+1)(c+1)$.

Do đó, ta có:

$$\frac{c^2+1}{(c+1)^2} + \frac{1}{ab+bc+ca+1} \geq \frac{c^2+1}{(c+1)^2} + \frac{1}{(ab+1)(c+1)} = \frac{c^2+1}{(c+1)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{c}+1\right)(c+1)} = \frac{c^2+c+1}{(c+1)^2}$$

Khi đó
$$P \geq 1 + \frac{c^2+c+1}{(c+1)^2}$$

Ta chứng minh rằng $P \geq \frac{7}{4}$. Ta có: $1 + \frac{c^2+c+1}{(c+1)^2} \geq \frac{7}{4}$ hay $4(c^2+x+1) \geq 3(c+1)^2$ suy ra $(c-1)^2 \geq 0$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Câu 17 (1 điểm).

a) Cho a, b là hai số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu $a \geq 2$ thì giá trị của biểu thức

$P = a^2b^2 - 2a - b$ không phải là một số chính phương.

b) Cắt một tờ giấy hình chữ nhật theo một đường thẳng, được hai mảnh. Lấy một trong hai mảnh đó, cắt theo một đường thẳng được hai mảnh, và làm tiếp như vậy nhiều lần. Hỏi cần phải cắt ít nhất bao nhiêu lần để được 16 hình lục giác?

Hướng dẫn giải

a) Ta có $P < (ab)^2$ và $P - (ab-1)^2 = 2ab - 2a - b - 1 = 2a(b-1) - (b+1)$.

Nếu $b=1$ thì $P = a^2 - 2a - 1$.

Để ý $a=2$ không thỏa mãn, còn khi $a \geq 3$ thì mâu thuẫn do $(a-2)^2 < a^2 - 2a - 1 < (a-1)^2$.

Nếu $b \geq 2$ thì $P - (ab - 1)^2 \geq 4(b - 1) - (b + 1) = 3b - 5 > 0$.

Khi đó $(ab - 1)^2 < P < (ab)^2$ (vô lí)

Do đó, $P = a^2b^2 - 2a - b$ không phải là số chính phương nếu $a \geq 2$.

b) Xét tổng số đỉnh của các mảnh giấy thu được.

Ban đầu, tờ giấy hình chữ nhật có 4 đỉnh.

Mỗi nhát cắt thẳng qua một mảnh giấy làm tăng tổng số đỉnh thêm không quá 4.

Gọi n là số nhát cắt $n \in \mathbb{N}^*$. Sau n nhát cắt, ta sẽ có được $n + 1$ mảnh giấy.

Theo đề bài, trong số $n + 1$ mảnh giấy này có iats nhất 16 hình lục giác, mỗi hình có 6 đỉnh. Khi đó, số mảnh giấy còn lại là $(n + 1) - 16 = n - 15$ mảnh, mỗi mảnh này là một tam giác nên có ít nhất 3 đỉnh (hình tam giác).

Khi đó, sau n nhát cắt, tổng số đỉnh của các mảnh giấy cho ta $16 \cdot 6 + 3(n - 15) \leq 4n + 4$, suy ra $n \geq 47$.

Giờ ta sẽ chỉ ra trường hợp xảy ra dấu “=”, ($n = 47$);

- Cắt tạo lục giác đầu tiên: Từ tờ giấy hình chữ nhật, ta cắt 2 nhát ở hai góc bất kỳ, lúc này ta thu được đúng 1 hình lục giác và 2 hình tam giác.
- Lặp lại quy trình cắt: Mỗi hình tam giác thu được ở trên, ta cắt thêm 3 nhát cắt thì sẽ sinh ra thêm được đúng 1 hình lục giác và 2 hình tam giác mới. Ta lặp lại quy trình này đúng 15 lần là hoàn thành bài toán.

Vậy số lần cắt ít nhất để thu được 16 hình lục giác là 47 lần.

-----HẾT-----