

Thời gian làm bài: 120 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. (1,0 điểm) Không dùng máy tính cầm tay, rút gọn biểu thức:

$$P = 2\sqrt{4} + \sqrt{9} - \sqrt{16}.$$

Câu 2. (2,0 điểm) Không dùng máy tính cầm tay, giải phương trình, hệ phương trình sau:

a) $x^2 - 7x + 12 = 0;$

b)
$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

Câu 3. (1,0 điểm) Ở nam giới trưởng thành, chiều cao H (cm) liên hệ với chiều dài xương chày t (cm) theo công thức $H = 2,4t + 78,7$.

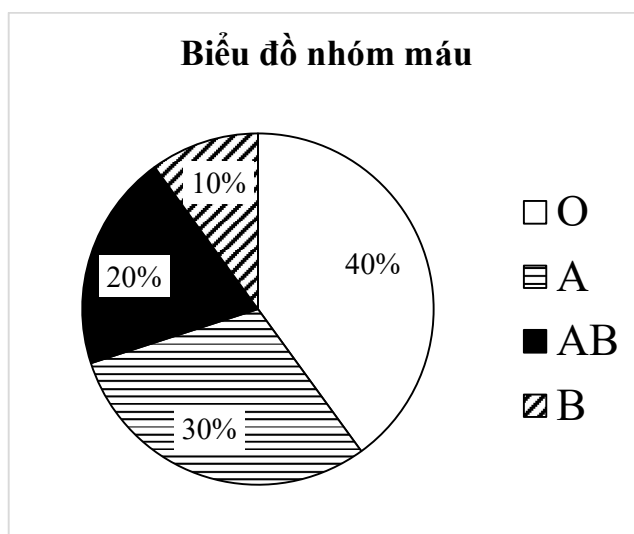
a) H có phải là hàm số bậc nhất của t không? Vì sao?

b) Biết rằng, chiều cao của một nam giới trưởng thành là 162,7 cm. Tính chiều dài xương chày của người đó.

Câu 4. (1,0 điểm) Lớp 9A có 45 học sinh. Kết thúc năm học 2025 - 2026, tổng số học sinh đạt danh hiệu học sinh Giỏi và học sinh Xuất sắc của lớp 9A chiếm 60% số học sinh cả lớp. Mỗi học sinh đạt danh hiệu học sinh Giỏi, học sinh Xuất sắc được thưởng tương ứng là 10 quyển vở, 15 quyển vở. Biết rằng, tổng số quyển vở thưởng cho các học sinh đạt danh hiệu nói trên là 300 quyển. Tính số học sinh đạt danh hiệu học sinh Giỏi, học sinh Xuất sắc của lớp 9A.

Câu 5. (1,5 điểm)

a) Khảo sát 200 người về nhóm máu của họ, kết quả thu được biểu đồ sau:



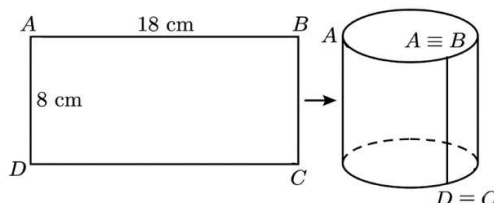
Trong những người được khảo sát, hãy cho biết: Nhóm máu nào phổ biến nhất? Nhóm máu đó có bao nhiêu người?

b) Hộp A đựng ba thẻ, mỗi thẻ đánh một trong các số 1;2;3. Hộp B đựng bốn thẻ, mỗi thẻ đánh một trong các số 4;5;6;7. Trong mỗi hộp các thẻ khác nhau đánh số khác nhau. Bạn An chọn ngẫu nhiên một thẻ trong hộp A . Sau đó, bạn An chọn ngẫu nhiên một thẻ trong hộp B . Tính xác suất của biến cố X : “Tích của hai số trên các thẻ mà bạn An chọn ra là một số lẻ”.

Câu 6. (2,0 điểm)

a) Cho tam giác ABC cân tại A có AH là đường cao. Biết $\angle ABC = 30^\circ$, $AH = 2$ cm. Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC .

b) Cho một tờ giấy hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 18$ cm và chiều rộng $AD = 8$ cm. Người ta cuộn tờ giấy lại sao cho hai mép chiều rộng của tờ giấy chạm khít nhau để tạo thành mặt xung quanh của một hình trụ (tham khảo hình vẽ). Tính chiều cao, diện tích xung quanh và bán kính đáy của hình trụ đó.



Câu 7. (1,5 điểm) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < BC < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Ba đường cao AM, BN, CP của tam giác ABC đồng quy tại điểm H . Gọi K, I tương ứng là trung điểm của đoạn thẳng AB, CH .

- Chứng minh rằng, các điểm H, M, C, N cùng thuộc một đường tròn;
- Chứng minh rằng, KM là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CH ;
- Đường tròn đường kính CH cắt đường tròn (O) tại điểm Q ($Q \neq C$). Chứng minh rằng, $HQ \cdot HK = 2HI \cdot HP$.

----- HẾT -----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

LỜI GIẢI CHI TIẾT VÀ TỐI ƯU HÓA PHƯƠNG PHÁP

Phân loại: Đề thi thuộc phạm vi kiến thức môn Toán lớp 9 (Chương trình GDPT 2018).

Ý kiến chuyên môn về độ tối ưu của lời giải:

- **Câu 6a, 6b:** Đây là các bài toán áp dụng trực tiếp công thức hệ thức lượng và hình khối không gian, các bước biến đổi hiện tại đã ngắn gọn và tối ưu nhất, không thể rút gọn thêm.
- **Câu 7 (Hình học phẳng):** Phương pháp sử dụng đường kính phụ CT ở câu c là phương pháp **tối ưu và đột phá nhất** đối với cấu trúc hình học lớp 9. Cách này giúp đưa thẳng bài toán về cặp tam giác đồng dạng cơ bản $\triangle HQC \sim \triangle HPK$ chỉ sau một bước chứng minh thẳng hàng, tránh được hoàn toàn việc phải kẻ thêm nhiều đường phụ phức tạp hoặc biến đổi đại số dài dòng qua các hệ thức lượng trung gian khác.

Câu 1 (1,0 điểm):

$$P = 2\sqrt{4} + \sqrt{9} - \sqrt{16}$$

$$P = 2 \cdot 2 + 3 - 4$$

$$P = 4 + 3 - 4 = 3.$$

Kết luận: $P = 3$.

Câu 2 (2,0 điểm):

- **a.** Giải phương trình $x^2 - 7x + 12 = 0$:
Phương trình có $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 1 > 0$.
Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{7+1}{2} = 4; \quad x_2 = \frac{7-1}{2} = 3.$$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S = \{3; 4\}$.

- **b.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 2(2y) - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 1)$.

Câu 3 (1,0 điểm):

- **a.** Công thức $H = 2,4t + 78,7$ có dạng $H = at + b$ với $a = 2,4 \neq 0$. Do đó, H là một hàm số bậc nhất của t .
- **b.** Thay $H = 162,7$ vào công thức:

$$162,7 = 2,4t + 78,7 \Leftrightarrow 2,4t = 84 \Leftrightarrow t = 35.$$

Kết luận: Chiều dài xương chày của người đó là 35 cm.

Câu 4 (1,0 điểm):

- Tổng số học sinh đạt danh hiệu Giỏi và Xuất sắc của lớp 9A là: $45 \cdot 60\% = 27$ (học sinh).
- Gọi x, y lần lượt là số học sinh Giỏi và Xuất sắc ($x, y \in \mathbb{N}^*; x, y < 27$).
- Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 27 \\ 10x + 15y = 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 10y = 270 \\ 10x + 15y = 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 30 \\ x = 27 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ x = 21 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn})$$

Kết luận: Lớp 9A có 21 học sinh Giỏi và 6 học sinh Xuất sắc.

Câu 5 (1,5 điểm):

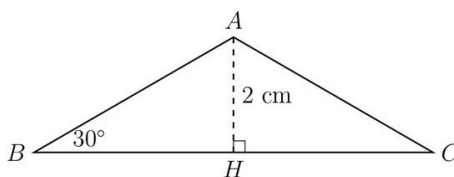
- a. Tỷ lệ nhóm máu O lớn nhất (40%) nên nhóm máu **O** phổ biến nhất.
Số người có nhóm máu O là: $200 \cdot 40\% = 80$ (người).
- b. Số kết quả có thể xảy ra khi chọn từ 2 hộp là: $n(\Omega) = 3 \cdot 4 = 12$.
Để tích hai số là số lẻ thì cả hai thẻ được chọn đều phải mang số lẻ:
- Hộp A có 2 thẻ lẻ ($\{1; 3\}$); Hộp B có 2 thẻ lẻ ($\{5; 7\}$).
 $\Rightarrow$ Số kết quả thuận lợi cho biến cố X là: $n(X) = 2 \cdot 2 = 4$.
Xác suất của biến cố X là: $P(X) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Câu 6 (2,0 điểm):

- a. Do $\triangle ABC$ cân tại A nên đường cao AH đồng thời là trung tuyến.
Xét $\triangle ABH$ vuông tại H :

$$AB = \frac{AH}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{0,5} = 4 \text{ (cm)} \Rightarrow AC = AB = 4 \text{ (cm)}.$$

$$BH = \frac{AH}{\tan 30^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)} \Rightarrow BC = 2BH = 4\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$



- **b.** Khi cuộn tròn tờ giấy hình chữ nhật để tạo thành hình trụ:
 - Chiều cao hình trụ bằng chiều rộng tờ giấy: $h = AD = 8 \text{ cm}$.
 - Diện tích xung quanh bằng diện tích tờ giấy: $S_{xq} = 18 \cdot 8 = 144 \text{ cm}^2$.
 - Chu vi đáy bằng chiều dài tờ giấy: $2\pi r = 18 \Rightarrow r = \frac{9}{\pi} \text{ cm}$.

Câu 7 (1,5 điểm):

- a. Chứng minh H, M, C, N cùng thuộc một đường tròn**
 Vì AM, BN là các đường cao nên $\widehat{HMC} = 90^\circ$ và $\widehat{HNC} = 90^\circ$.
 Tứ giác $HMCN$ có $\widehat{HMC} + \widehat{HNC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.
 Do đó, tứ giác $HMCN$ nội tiếp đường tròn đường kính CH . (đpcm)
- b. Chứng minh KM là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CH**
 Trong tam giác vuông AMB vuông tại M , KM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền $AB \Rightarrow KM = KB = \frac{1}{2}AB$.
 $\Rightarrow \triangle KMB$ cân tại $K \Rightarrow \widehat{KMB} = \widehat{KBM} = \widehat{ABC}$.

Đường tròn đường kính CH có tâm là I . Vì M thuộc đường tròn này nên $IM = IC \Rightarrow \triangle IMC$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{IMC} = \widehat{ICM} = \widehat{HCB}$.

Mà trong tam giác vuông BPC vuông tại P , ta có $\widehat{PBC} + \widehat{PCB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{HCB} = 90^\circ$.

Từ đó suy ra: $\widehat{KMB} + \widehat{IMC} = 90^\circ$.

Ta có $\widehat{KMI} = 180^\circ - (\widehat{KMB} + \widehat{IMC}) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow KM \perp IM$.

Vậy KM là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CH . (đpcm)

• **c. Chứng minh $HQ \cdot HK = 2HI \cdot HP$ (Phương pháp tối ưu bằng đường kính phụ)**

Kẻ đường kính CT của đường tròn ngoại tiếp (O).

Ta có $\widehat{CQT} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow TQ \perp QC$.

Điểm Q thuộc đường tròn đường kính CH nên $\widehat{CQH} = 90^\circ \Rightarrow HQ \perp QC$.

Xem xét tính chất của trục tâm và đường tròn ngoại tiếp, dễ dàng chứng minh được tứ giác $AHBT$ là hình bình hành (do $AT \parallel BH$ cùng vuông góc AC , và $BT \parallel AH$ cùng vuông góc BC).

Vì K là trung điểm đường chéo AB của hình bình hành $AHBT$ nên K cũng là trung điểm của đường chéo còn lại HT . Do đó 3 điểm H, Q, T thẳng hàng dẫn tới bốn điểm H, Q, K, T thẳng hàng.

Xét $\triangle HQC$ và $\triangle HPK$ có:

$$\begin{aligned} \widehat{HQC} &= \widehat{HPK} = 90^\circ \\ \widehat{QHC} &\text{ là góc chung} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \triangle HQC \sim \triangle HPK \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{HQ}{HP} = \frac{HC}{HK} \Rightarrow HQ \cdot HK = HC \cdot HP.$$

Mà I là trung điểm của CH nên $HC = 2HI$.

Vậy ta nhận được ngay hệ thức tối ưu: $HQ \cdot HK = 2HI \cdot HP$. (đpcm)