

Câu 1 (2,0 điểm).

✓ a) Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 + 2y^2 + 3xy - 2x - 3y = 0$.

b) Cho n là một số nguyên dương và m là một ước số nguyên dương của $2n^2$.

Hỏi $n^2 + m$ có thể là số chính phương không? Tại sao?

Câu 2 (7,0 điểm).

✓ a) Giải phương trình $\left(\frac{2}{x}\right)^2 + \left(\frac{2}{x+1}\right)^2 = 5$.

✓ b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2(1+y^2-y^3) = y(x^2+y^2+1) \\ 31x^2-1 = 16(y-x\sqrt{4x^2-1}) \end{cases}$$

Câu 3 (2,0 điểm).

Một hộp có 7 viên bi gồm hai viên bi màu xanh được đánh số 1 và 2; hai viên bi màu đỏ được đánh số 3 và 4; ba viên bi màu vàng được đánh số 5, 6 và 7.

✓ a) Một bạn học sinh chọn ngẫu nhiên 6 viên bi từ hộp. Tính xác suất của biến cố “6 viên bi được chọn có 3 viên bi màu vàng”.

b) Thầy giáo tổ chức trò chơi bốc bi trúng thưởng như sau: Mỗi học sinh chọn ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp rồi bỏ lại, nếu trong các viên bi được chọn có hai viên bi được đánh số liên tiếp nhau thì bạn đó trúng thưởng. Bạn An là một học sinh tham gia trò chơi. Tính xác suất để bạn An trúng thưởng.

Câu 4 (7,0 điểm).

Cho tam giác ABC nhọn có $BC > BA$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại các điểm M, N, E . Gọi K là giao điểm của tia BI với đoạn thẳng NE .

✓ a) Chứng minh $\widehat{BIA} = \widehat{BNE}$ và AKB là tam giác vuông.

✓ b) Tia BI cắt đoạn thẳng AC tại điểm T . Chứng minh $KT \cdot BN = KB \cdot ET$.

c) Qua A vẽ đường thẳng d vuông góc với AI . Tia NE và tia NM cắt đường thẳng d lần lượt tại các điểm F và D . Gọi H là giao điểm của AI và ME , O là giao điểm của hai đường thẳng HF và DI . Chứng minh bốn điểm A, O, I, F cùng thuộc một đường tròn.

Câu 5 (1,0 điểm).

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} \right) - \sqrt{11 + \frac{4}{xyz}}$.

Câu 6 (1,0 điểm).

Trên mặt phẳng cho 18 điểm phân biệt trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Qua hai điểm bất kì ta vẽ được một đoạn thẳng và trên đoạn thẳng đó ghi một số nguyên bất kì lớn hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có các cạnh là các đoạn thẳng đã vẽ và tổng các số ghi trên các cạnh của tam giác đó là hợp số.

----- Hết -----

Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh

SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
NGHỆ AN

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU
NĂM HỌC 2026 - 2027

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN

(Đề thi có 2 trang)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1 (2,0 điểm).

a) Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 + 2y^2 + 3xy - 2x - 3y = 0$.

b) Cho n là một số nguyên dương và m là một ước số nguyên dương của $2n^2$. Hỏi $n^2 + m$ có thể là số chính phương không? Tại sao?

Câu 2 (7,0 điểm).

a) Giải phương trình $\left(\frac{2}{x}\right)^2 + \left(\frac{2}{x+1}\right)^2 = 5$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2(1+y^2-y^3) = y(x^2+y^2+1) \\ 31x^2-1 = 16(y-x\sqrt{4x^2-1}) \end{cases}$$
.

Câu 3 (2,0 điểm).

Một hộp có 7 viên bi gồm hai viên bi màu xanh được đánh số 1 và 2; hai viên bi màu đỏ được đánh số 3 và 4; ba viên bi màu vàng được đánh số 5, 6 và 7.

a) Một bạn học sinh chọn ngẫu nhiên 6 viên bi từ hộp. Tính xác suất của biến cố “6 viên bi được chọn có 3 viên bi màu vàng”.

b) Thầy giáo tổ chức trò chơi bốc bi trúng thưởng như sau. Mỗi học sinh chọn ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp rồi bỏ lại, nếu trong các viên bi được chọn có hai viên bi được đánh số liên tiếp nhau thì bạn đó trúng thưởng. Bạn An là một học sinh tham gia trò chơi. Tính xác suất để bạn An trúng thưởng.

Câu 4 (7,0 điểm).

Cho tam giác ABC nhọn có $BC > BA$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại các điểm M, N, E . Gọi K là giao điểm của tia BI với đoạn thẳng NE .

a) Chứng minh $\angle BIA = \angle BNE$ và AKB là tam giác vuông.

b) Tia BI cắt đoạn thẳng AC tại điểm T . Chứng minh $KT \cdot BN = KB \cdot ET$.

c) Qua A vẽ đường thẳng d vuông góc với AI . Tia NE và tia NM cắt đường thẳng d lần lượt tại các điểm F và D . Gọi H là giao điểm của AI và ME , O là giao điểm của hai đường thẳng HF và DI . Chứng minh bốn điểm A, O, I, F cùng thuộc một đường tròn.

Câu 5 (1,0 điểm).

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{xz}} \right) - \sqrt{1 + \frac{4}{xyz}}$$

Câu 6 (1,0 điểm).

Trên mặt phẳng cho 18 điểm phân biệt trong đó có không có ba điểm nào thẳng hàng. Qua hai điểm bất kì ta vẽ được một đoạn thẳng và trên đoạn thẳng đó ghi một số nguyên bất kì lớn hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có các cạnh là các đoạn thẳng đã vẽ và tổng các số ghi trên các cạnh của tam giác đó là hợp số.

-----**HẾT**-----

Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN

(Đề thi có 2 trang)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1 (2,0 điểm).

a) Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 + 2y^2 + 3xy - 2x - 3y = 0$.

b) Cho n là một số nguyên dương và m là một ước số nguyên dương của $2n^2$. Hỏi $n^2 + m$ có thể là số chính phương không? Tại sao?

Hướng dẫn giải

a) Ta phân tích phương trình như sau:

$$(x+y)(x+2y) - (x+y) - (x+2y) = 0$$

$$(x+y-1)(x+2y-1) = 1$$

Từ đây ta thu được các trường hợp sau:

$$\text{TH1: } \begin{cases} x+y-1=1 \\ x+2y-1=1 \end{cases} \text{ giải được } \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}.$$

$$\text{TH2. } \begin{cases} x+y-1=-1 \\ x+2y-1=-1 \end{cases} \text{ giải được } \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}.$$

Do vậy ta thu được các nghiệm $(x; y) \in \{(2; 0); (0; 0)\}$.

b) Viết lại $2n^2 = km; k \in \mathbb{N}^*$ hay $m = \frac{2n^2}{k}$. Lúc này thì:

$$n^2 + m = n^2 \left(1 + \frac{2}{k}\right) \text{ suy ra } k^2(n^2 + m) = n^2(k^2 + 2k).$$

Giả sử $n^2 + m$ là số chính phương vậy thì phải có $n^2(k^2 + 2k)$ là số chính phương. Mà n^2 là

số chính phương khác 0 và $k^2 + 2k$ là số nguyên, thế nên $k^2 + 2k$ là số chính phương. Điều này rõ

ràng vô lí do $k^2 < k^2 + 2k < (k+1)^2$.

Do đó, giả sử vô lí hay $n^2 + m$ không thể là số chính phương.

Câu 2 (7,0 điểm).

a) Giải phương trình $\left(\frac{2}{x}\right)^2 + \left(\frac{2}{x+1}\right)^2 = 5$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2(1+y^2-y^3) = y(x^2+y^2+1) \\ 31x^2-1 = 16(y-x\sqrt{4x^2-1}) \end{cases}$$
.

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện xác định: $x \neq 0; x \neq -1$. Quy đồng hai vế:

$$4(x+1)^2 + 4x^2 = 5x^2(x+1)^2$$

$$5x^4 + 10x^3 - 3x^2 - 8x - 4 = 0$$

$$(x-1)(x+2)(5x^2+5x+2) = 0$$

Phương trình sau cùng vô nghiệm do $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = -15 < 0$.

Do đó, $x \in \{1; 2\}$ (thỏa mãn điều kiện).

b) Điều kiện xác định: $|x| \geq \frac{1}{2}$.

Từ phương trình (1) suy ra $x^2 + x^2y^2 - x^2y^3 - x^2y - y^3 - y = 0$.

$$(y^2+1)(x^2-x^2y-y) = 0$$

Mà $y^2+1 > 0$ nên $x^2-x^2y-y=0$ hay $y = \frac{x^2}{x^2+1}$. Thay vào phương trình (2) được:

$$31x^2-1 = \frac{16x^2}{x^2+1} - 16x\sqrt{4x^2-1}$$

$$31x^4 + 14x^2 - 1 = -16(x^2+1)\sqrt{4x^2-1}$$

$$(31x^4 + 14x^2 - 1)^2 = 256x^2(x^2+1)^2(4x^2-1)$$

Đặt $a = x^2$ ($a \geq 0$). Ta đưa về phương trình $63a^4 + 924a^3 + 378a^2 - 228a - 1 = 0$

Suy ra $(3a-1)(21a^3 + 315a^2 + 231a + 1) = 0$

Vì $a \geq 0$ nên $a = \frac{1}{3}$. Từ đó $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ và $y = \frac{1}{4}$. Thử lại ta thấy $(x, y) = \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}; \frac{1}{4}\right)$ thỏa mãn.

Câu 3 (2,0 điểm).

Một hộp có 7 viên bi gồm hai viên bi màu xanh được đánh số 1 và 2; hai viên bi màu đỏ được đánh số 3 và 4; ba viên bi màu vàng được đánh số 5, 6 và 7.

a) Một bạn học sinh chọn ngẫu nhiên 6 viên bi từ hộp. Tính xác suất của biến cố “6 viên bi được chọn có 3 viên bi màu vàng”.

b) Thầy giáo tổ chức trò chơi bốc bi trúng thưởng như sau. Mỗi học sinh chọn ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp rồi bỏ lại, nếu trong các viên bi được chọn có hai viên bi được đánh số liên tiếp nhau thì bạn đó trúng thưởng. Bạn An là một học sinh tham gia trò chơi. Tính xác suất để bạn An trúng thưởng.

Hướng dẫn giải

a) Chọn 6 viên từ 7 viên ứng với bỏ lại đúng 1 viên nên số phần tử không gian mẫu bằng 7.

Muốn trong 6 viên được chọn có đúng 3 viên bi màu vàng thì viên bi bị loại bỏ phải là bi xanh hoặc bi đỏ (bi 1, 2, 3, hoặc 4) do đó có 4 cách.

Do đó, xác suất cần tìm là $P = \frac{4}{7}$.

b) Tổng số cách chọn 3 viên từ 7 viên (chú ý là mỗi bộ 3 viên bi lặp $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$).

Ta có: $n = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$ cách.

Ta đếm số các bộ ba không có cặp số liên tiếp nào.

- Bắt đầu bằng 1: {1, 3, 5}; {1, 3, 6}; {1, 3, 7}; {1, 4, 6}; {1, 4, 7}; {1, 5, 7}. Do đó có 6 bộ.
- Bắt đầu bằng 2: {2, 4, 6}; {2, 4, 7}; {2, 5, 7}. Do đó có 3 bộ.
- Bắt đầu bằng 3: {3, 5, 7}. Do đó có 1 bộ.

Tổng số bộ không trúng là: $6 + 3 + 1 = 10$ (bộ)

Số bộ trúng thưởng là $35 - 10 = 25$.

Do đó, xác suất để bạn An trúng thưởng là: $P = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$.

Câu 4 (7,0 điểm).

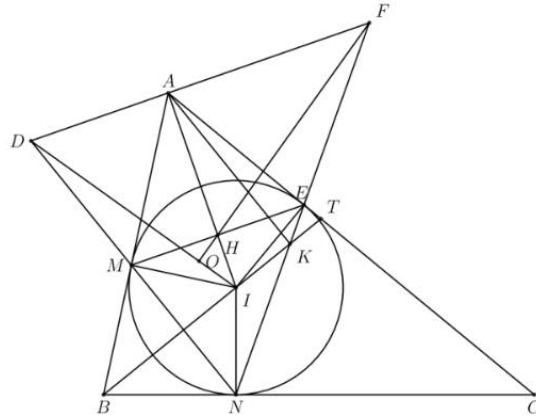
Cho tam giác ABC nhọn có $BC > BA$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại các điểm M, N, E . Gọi K là giao điểm của tia BI với đoạn thẳng NE .

a) Chứng minh $\angle BIA = \angle BNE$ và AKB là tam giác vuông.

b) Tia BI cắt đoạn thẳng AC tại điểm T . Chứng minh $KT \cdot BN = KB \cdot ET$.

c) Qua A vẽ đường thẳng d vuông góc với AI . Tia NE và tia NM cắt đường thẳng d lần lượt tại các điểm F và D . Gọi H là giao điểm của AI và ME , O là giao điểm của hai đường thẳng HF và DI . Chứng minh bốn điểm A, O, I, F cùng thuộc một đường tròn.

Hướng dẫn giải



a) Ta có: $\angle BIA = 180^\circ - \angle BAI - \angle ABI = 180^\circ - \frac{\angle BAC}{2} - \frac{\angle ABC}{2} = 90^\circ + \frac{\angle ACB}{2} = \angle BNE$.

Có $\angle BIA = \angle BNE = 180^\circ - \angle ENC = 180^\circ - \angle NEC = \angle AEK$ nên tứ giác $AEKI$ nội tiếp, suy ra $\angle AKB = 90^\circ$.

Do đó, tam giác AKB vuông.

b) Áp dụng định lý Menelaus vào tam giác BTC với E, K, N thẳng hàng. Ta có:

$$1 = \frac{EC}{ET} \cdot \frac{KT}{KB} \cdot \frac{BN}{NC} = \frac{BN}{ET} \cdot \frac{KT}{KB}$$

Hay $KT \cdot BN = KB \cdot ET$.

c) Xét tam giác AMD và tam giác AFE có
$$\begin{cases} \angle AMD = \angle BMN = \angle NEM = \angle AFE \\ \angle DAM = \angle AME = \angle AEM = \angle FAE \end{cases}$$
 nên $\triangle AMD \sim \triangle AFE$ (g.g)

Từ đó, ta suy ra $AD \cdot AF = AE^2 = AH \cdot AI$ nên H là trực tâm của tam giác FID dẫn đến $\angle FOD = 90^\circ$ hay bốn điểm A, F, I, O cùng thuộc đường tròn đường kính FI .

Câu 5 (1,0 điểm).

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{xz}} \right) - \sqrt{11 + \frac{4}{xyz}}.$$

Hướng dẫn giải

Đặt $a = \frac{1}{\sqrt{xy}}, b = \frac{1}{\sqrt{yz}}, c = \frac{1}{\sqrt{xz}}$ ta đưa điều kiện về $a^2 + b^2 + c^2 = 2abc$ (*) và $T = \sqrt{2}(a + b + c) - \sqrt{11 + 4abc}$.

Ta chứng minh $T \geq \sqrt{2}$ tương đương với $\sqrt{2}(a + b + c - 1) \geq \sqrt{11 + 4abc}$.

Từ giả thiết dễ thấy $a + b + c > 1$ nên bất đẳng thức này tương đương với

$$2(a + b + c)^2 - 4(a + b + c) + 2 \geq 11 + 4abc$$

$$4(ab + bc + ca) \geq 4(a + b + c) + 9.$$

Đến đây dùng phép thế (a, b, c) suy ra $\left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}b, \frac{3}{2}c\right)$ (để đưa a, b, c về bằng 1), thì giả thiết viết lại thành $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$, ta cần chứng minh: $3(ab + bc + ca) \geq 2(a + b + c) + 3$.

Vì $a - 1, b - 1, c - 1$ có hai số cùng dấu, KMTTQ giả sử $(a - 1)(b - 1) \geq 0$ hay $ab \geq a + b - 1$.

Khi đó: $3(ab + bc + ca) \geq 3(a + b - 1) + 3c(a + b)$.

Ta đưa về chứng minh $3(a + b - 1) + 3c(a + b) \geq 2(a + b + c) + 3$

$$(a + b)(3c + 1) \geq 2c + 6$$

$$a+b \geq \frac{2(c+3)}{3c+1}.$$

Mặt khác, từ cách đặt suy ra $(a+b)^2 + c^2 = ab(3c+2) \leq \frac{(a+b)^2(3c+2)}{4}$

Suy ra $(a+b)^2(3c-2) \geq 4c^2$.

Từ đây suy ra $c > \frac{2}{3}$ và $(a+b)^2 \geq \frac{4c^2}{3c-2}$. Lúc đó, kết hợp điều cần chứng minh, ta quy về chứng

minh $\frac{4c^2}{3c-2} \geq \frac{4(c+3)^2}{(3c+1)^2}$ suy ra $\frac{(c-1)^2(3c^2+7c+6)}{(3c-2)(3c+1)^2} \geq 0$ (luôn đúng)

Dấu “=” xảy ra khi $x=y=z=\frac{2}{3}$. Vậy $T_{\min} = \sqrt{2}$.

Câu 6 (1,0 điểm).

Trên mặt phẳng cho 18 điểm phân biệt trong đó có không có ba điểm nào thẳng hàng. Qua hai điểm bất kì ta vẽ được một đoạn thẳng và trên đoạn thẳng đó ghi một số nguyên bất kì lớn hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có các cạnh là các đoạn thẳng đã vẽ và tổng các số ghi trên các cạnh của tam giác đó là hợp số.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh bổ đề sau:

Cho 17 điểm phân biệt, không có ba điểm thẳng hàng. Tô các cạnh bờ 1 trong ba màu đỏ, xanh, vàng. Chứng minh rằng luôn có 1 tam giác với cả ba cạnh cùng màu.

Chứng minh: Trước hết, xét một đỉnh A bất kì trong số 17 đỉnh đó. Khi đó, theo nguyên lí Dirichlet thì trong số 16 cạnh từ A có ít nhất $\lceil 16/3 \rceil = 6$ cạnh cùng màu, giả sử chúng có cùng đỏ và ta đánh

thứ tự là $AA_1, AA_2, \dots, AA_6$. Khi đó, nếu trong 6 cạnh đó có cạnh màu đỏ thì thu được tam giác đơn sắc

đỏ. Còn nếu như trong 6 cạnh đó không có cạnh đỏ thì chỉ gồm cạnh xanh và vàng. Giờ, xét A_1 thì rõ

ràng trong 5 cạnh $A_1A_2, A_1A_3, \dots, A_1A_6$ có ít nhất 3 cạnh cùng màu, giả sử cùng xanh và là

A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 . Khi đó, nếu trong A_2A_3, A_2A_4, A_3A_4 có cạnh màu xanh thì ta thu được tam giác đơn

sắc xanh, còn nếu không thì 3 cạnh đó cũng lập thành tam giác đơn sắc vàng. Do đó, trong mỗi trường hợp thì ta luôn thu được tam giác đơn sắc.

Trở lại bài toán ban đầu, ta xét tập hợp 17 đỉnh bất kì. Khi đó, với mỗi cạnh có gán số a , nếu $a \bmod 3 = 0$ thì ta gán cạnh đỏ, $a \bmod 3 = 1$ thì ta gán cạnh xanh, $a \bmod 3 = 2$ thì ta gán cạnh vàng.

Theo bổ đề trên, rõ ràng luôn tồn tại một tam giác đơn sắc, gọi là $\triangle ABC$. Giả sử số được gán trên BC, CA, AB là a, b, c thì $a + b + c$ chia hết cho 3 và $a, b, c > 1$ nên $a + b + c$ là hợp số.

-----**HẾT**-----