

Câu I. (1,5 điểm)

1) Kết quả đo chiều cao của 50 học sinh lớp 6 (đơn vị: cm) được thống kê trong bảng tần số ghép nhóm sau đây:

Chiều cao (cm)	[140; 145)	[145; 150)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)
Số học sinh	10	18	14	6	2

Xác định tần số và tần số tương đối của nhóm [150;155) .

2) Một hộp đựng 6 quả bóng cùng loại, mỗi quả bóng ghi một trong các số 1, 2, 3, 4, 5, 6; hai quả bóng khác nhau được ghi hai số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một quả bóng trong hộp. Tính xác suất của biến cố A: “Số ghi trên quả bóng lấy được là số chẵn”.

Câu II. (1,5 điểm) Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{4}{\sqrt{x}-3} + \frac{x-7\sqrt{x}-12}{x-9}$ với $x > 0, x \neq 9$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$.

3) Tìm tất cả giá trị của x để biểu thức $P = A \cdot B$ có giá trị là số nguyên.

Câu III. (2,5 điểm)

1) Một tổ sản xuất lập kế hoạch may áo với số lượng áo mỗi ngày may được là như nhau. Trong 3 ngày đầu, mỗi ngày tổ đã may theo đúng kế hoạch. Trong 7 ngày tiếp theo, nhờ cải tiến kỹ thuật nên mỗi ngày tổ đã may được nhiều hơn 5 chiếc áo so với kế hoạch. Vì vậy sau 10 ngày, tổ đã may được tổng số 335 chiếc áo. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày tổ sản xuất may bao nhiêu chiếc áo?

2) Một người mua 25 bông hoa gồm hoa hồng và hoa cúc hết tổng số tiền là 180 nghìn đồng. Biết giá tiền mỗi bông hoa hồng là 8 nghìn đồng, giá tiền mỗi bông hoa cúc là 6 nghìn đồng. Hỏi người đó đã mua bao nhiêu bông hoa mỗi loại?

3) Biết phương trình bậc hai $x^2 - 3x + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 , tính giá trị của biểu thức $Q = \frac{3x_2-1}{x_1} + \frac{3x_1}{x_2} - x_1$.

Câu IV. (4,0 điểm)

1) Một xô đựng nước dạng hình trụ có chiều cao bằng 25 cm và bán kính đáy bằng 12 cm. (Lấy $\pi \approx 3,14$ và coi độ dày của xô đựng nước không đáng kể).

a) Tính diện tích xung quanh của xô đựng nước đó.

b) Người ta dùng xô đựng nước trên để mức nước đổ vào một bể có thể tích 150 lít. Mỗi lần người ta chỉ mức lượng nước bằng 80% thể tích của xô. Lúc đầu bể không có nước, hỏi cần mức ít nhất bao nhiêu xô để đổ đầy bể? (Biết $1 \text{ lít} = 1000 \text{ cm}^3$).

2) Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O , đường kính BC . Lấy điểm H thuộc đoạn thẳng AB sao cho $HB > HA$ (H khác A). Kẻ đường thẳng qua H vuông góc với đường thẳng BC tại điểm D và cắt đường thẳng AC tại điểm E .

a) Chứng minh bốn điểm A, H, D, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Đường thẳng CH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F . Đường thẳng qua A vuông góc với đường thẳng ED cắt đường thẳng DF tại điểm M . Chứng minh $AE \cdot BC = EH \cdot AB$ và $\angle EMH = 90^\circ$.

c) Đường thẳng BM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai K . Chứng minh tam giác HKM là tam giác cân.

Câu V. (0,5 điểm) Một công ty dự định thuê một kho xưởng và điều động một số công nhân để hoàn thành đơn hàng 1000 sản phẩm. Chi phí thuê kho xưởng được tính theo ngày với giá 3 triệu đồng một ngày. Biết một ngày mỗi công nhân làm được 5 sản phẩm và công ty dự định thưởng mỗi công nhân 1 triệu đồng sau khi đơn hàng được hoàn thành. Công ty muốn tổng chi phí thuê kho xưởng và thưởng công nhân khi hoàn thành đơn hàng là nhỏ nhất. Hỏi công ty nên điều động bao nhiêu công nhân và thuê kho xưởng trong bao nhiêu ngày?

—————**HẾT**—————

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu I. (1,5 điểm)

1) Kết quả đo chiều cao của 50 học sinh lớp 6 (đơn vị: cm) được thống kê trong bảng tần số ghép nhóm sau đây:

Chiều cao (cm)	[140; 145)	[145; 150)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)
Số học sinh	10	18	14	6	2

Xác định tần số và tần số tương đối của nhóm [150;155) .

2) Một hộp đựng 6 quả bóng cùng loại, mỗi quả bóng ghi một trong các số 1, 2, 3, 4, 5, 6; hai quả bóng khác nhau được ghi hai số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một quả bóng trong hộp. Tính xác suất của biến cố A: “Số ghi trên quả bóng lấy được là số chẵn”.

Hướng dẫn giải

1) Dựa vào bảng tần số ghép nhóm ta có:

– Tần số ghép nhóm của nhóm [150; 155) là: 14.

– Tần số tương đối ghép nhóm của nhóm [150; 155) là: $\frac{14}{50} \cdot 100\% = 28\%$.

Vậy nhóm [150;155) có tần số ghép nhóm là 14 và tần số tương đối ghép nhóm là 28%.

2) Tập hợp các kết quả có thể xảy ra khi lấy ngẫu nhiên một quả bóng là $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Số kết quả có thể xảy ra là $n(\Omega) = 6$.

Vì các quả bóng cùng loại nên các kết quả là đồng khả năng.

Các kết quả thuận lợi cho A là $\{2; 4; 6\}$, số kết quả thuận lợi là $n(A) = 3$.

Xác suất của biến cố A là: $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Câu II. (1,5 điểm) Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{4}{\sqrt{x}-3} + \frac{x-7\sqrt{x}-12}{x-9}$ với $x > 0, x \neq 9$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$.

3) Tìm tất cả giá trị của x để biểu thức $P = A \cdot B$ có giá trị là số nguyên.

Hướng dẫn giải

1) Thay $x = 25$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{\sqrt{25} - 4}{\sqrt{25}} = \frac{5 - 4}{5} = \frac{1}{5}.$$

Vậy $A = \frac{1}{5}$ khi $x = 25$.

2) Với $x > 0, x \neq 9$ ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{4}{\sqrt{x}-3} + \frac{x-7\sqrt{x}-12}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{4(\sqrt{x}+3) + x-7\sqrt{x}-12}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{4\sqrt{x}+12+x-7\sqrt{x}-12}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x-3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}.$$

$$3) \text{ Với } x > 0, x \neq 9 \text{ ta có: } P = A \cdot B = \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+3} = 1 - \frac{7}{\sqrt{x}+3}.$$

$$\text{Vì } 1 \in \mathbb{Z} \text{ nên } P \in \mathbb{Z} \text{ khi và chỉ khi } P = \frac{7}{\sqrt{x}+3} \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Với } x > 0, x \neq 9 \text{ thì } \sqrt{x}+3 > 3, \text{ từ đó } 0 < \frac{7}{\sqrt{x}+3} < \frac{7}{3} \text{ hay } 0 < P < \frac{7}{3}.$$

$$\text{Mà } P \in \mathbb{Z} \text{ nên } P \in \{1; 2\}.$$

$$- \text{ Với } P = 1 \text{ ta có } \sqrt{x}+3 = 7 \text{ suy ra } \sqrt{x} = 4 \text{ nên } x = 16 \text{ (TMĐK).}$$

$$- \text{ Với } P = 2 \text{ ta có } \sqrt{x}+3 = \frac{7}{2} \text{ suy ra } \sqrt{x} = \frac{1}{2} \text{ nên } x = \frac{1}{4} \text{ (TMĐK).}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{1}{4}; 16 \right\} \text{ để } P \text{ nhận giá trị nguyên.}$$

Câu III. (2,5 điểm)

1) Một tổ sản xuất lập kế hoạch may áo với số lượng áo mỗi ngày may được là như nhau. Trong 3 ngày đầu, mỗi ngày tổ đã may theo đúng kế hoạch. Trong 7 ngày tiếp theo, nhờ cải tiến kỹ thuật nên mỗi ngày tổ đã may được nhiều hơn 5 chiếc áo so với kế hoạch. Vì vậy sau 10 ngày, tổ đã may được tổng số 335 chiếc áo. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày tổ sản xuất may bao nhiêu chiếc áo?

2) Một người mua 25 bông hoa gồm hoa hồng và hoa cúc hết tổng số tiền là 180 nghìn đồng. Biết giá tiền mỗi bông hoa hồng là 8 nghìn đồng, giá tiền mỗi bông hoa cúc là 6 nghìn đồng. Hỏi người đó đã mua bao nhiêu bông hoa mỗi loại?

3) Biết phương trình bậc hai $x^2 - 3x + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 , tính giá trị của biểu thức $Q = \frac{3x_2 - 1}{x_1} + \frac{3x_1}{x_2} - x_1$.

Hướng dẫn giải

1) Gọi số áo mỗi ngày tổ sản xuất may theo kế hoạch là x (chiếc, $x \in \mathbb{N}^*$).

Số áo may được trong 3 ngày đầu là: $3x$ (chiếc).

Thực tế, trong 7 ngày tiếp theo, mỗi ngày tổ may được nhiều hơn 5 chiếc, tức là $x + 5$ (chiếc).

Số áo may được trong 7 ngày tiếp theo là: $7(x + 5)$ (chiếc).

Vì sau 10 ngày, tổ đã may được tổng số 335 chiếc áo nên ta có phương trình:

$$3x + 7(x + 5) = 335$$

$$3x + 7x + 35 = 335$$

$$10x = 300$$

$$x = 30 \text{ (thỏa mãn ĐK).}$$

Vậy theo kế hoạch, mỗi ngày tổ sản xuất dự định may 30 chiếc áo.

2) Gọi số bông hoa hồng và hoa cúc người đó đã mua lần lượt là x và y (bông, $x, y \in \mathbb{N}^*$; $x, y < 25$).

Người đó mua 25 bông hoa nên ta có phương trình: $x + y = 25$ (1).

Số tiền mua hoa hồng là $8x$ (nghìn đồng), số tiền mua hoa cúc là $6y$ (nghìn đồng). Tổng số tiền hết 180 nghìn đồng nên ta có phương trình:

$$8x + 6y = 180 \text{ hay } 4x + 3y = 90 \text{ (2).}$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 25 \\ 4x + 3y = 90 \end{cases}$$

Thế $y = 25 - x$ ta được $4x + 3(25 - x) = 90$ suy ra $x = 15$ (TMĐK).

Từ đó tìm được $y = 25 - 15 = 10$ (TMĐK).

Vậy người đó đã mua 15 bông hoa hồng và 10 bông hoa cúc.

3) Vì phương trình có nghiệm x_1, x_2 nên theo hệ thức Viète ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$$

Biến đổi biểu thức Q :

$$Q = \frac{3x_2 - 1}{x_1} + \frac{3x_1}{x_2} - x_1 = \frac{3x_2}{x_1} - \frac{1}{x_1} + \frac{3x_1}{x_2} - x_1 = 3\left(\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}\right) - \left(\frac{1+x_1^2}{x_1}\right) = \frac{3(x_1^2 + x_2^2)}{x_1 x_2} - \frac{x_1^2 + 1}{x_1}.$$

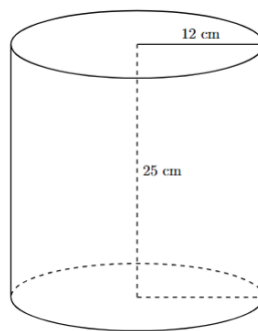
Ta có $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 3^2 - 2 \cdot 1 = 7$.

Vì x_1 là nghiệm của phương trình nên $x_1^2 - 3x_1 + 1 = 0$ suy ra $x_1^2 + 1 = 3x_1$.

Thay vào biểu thức Q ta được: $Q = 3 \cdot \frac{7}{1} - \frac{3x_1}{x_1} = 21 - 3 = 18$.

Câu IV. (4,0 điểm)

1) Một xô đựng nước dạng hình trụ có chiều cao bằng 25 cm và bán kính đáy bằng 12 cm. (Lấy $\pi \approx 3,14$ và coi độ dày của xô đựng nước không đáng kể).



a) Tính diện tích xung quanh của xô đựng nước đó.

b) Người ta dùng xô đựng nước trên để mức nước đổ vào một bể có thể tích 150 lít. Mỗi lần người ta chỉ mức lượng nước bằng 80% thể tích của xô. Lúc đầu bể không có nước, hỏi cần mức ít nhất bao nhiêu xô để đổ đầy bể? (Biết 1 lít = 1000 cm³).

2) Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O , đường kính BC . Lấy điểm H thuộc đoạn thẳng AB sao cho $HB > HA$ (H khác A). Kẻ đường thẳng qua H vuông góc với đường thẳng BC tại điểm D và cắt đường thẳng AC tại điểm E .

a) Chứng minh bốn điểm A, H, D, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Đường thẳng CH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F . Đường thẳng qua A vuông góc với đường thẳng ED cắt đường thẳng DF tại điểm M . Chứng minh $AE \cdot BC = EH \cdot AB$ và $\angle EMH = 90^\circ$.

c) Đường thẳng BM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai K . Chứng minh tam giác HKM là tam giác cân.

Hướng dẫn giải

1) a) Bán kính đáy $r = 12$ cm, chiều cao $h = 25$ cm. Diện tích xung quanh của xô đựng nước hình trụ là:

$$S_{xq} = 2\pi rh \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 12 \cdot 25 = 1884 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

HB , kéo theo $HDF = HBF$ (góc nội tiếp cùng chắn cung HF).

Mặt khác $HCA = HBF$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AF của (O)), suy ra $HDA = HDF$.

Gọi I là giao điểm của DE và AM , khi đó $\triangle DAM$ cân tại D do có DI vừa là đường phân giác, vừa là đường cao, kéo theo DE là trung trực của AM hay $EM = EA, HM = HA$.

Từ đó $\triangle EMH = \triangle EAH$ (c.c.c), dẫn đến $EMH = EAH = 90^\circ$.

c) **Cách 1:** Dễ thấy $AKBC$ là tứ giác nội tiếp (O) , dẫn đến:

$$AKM = 180^\circ - AKB = ACB = AHE = \frac{1}{2}MHA.$$

Đề ý $HM = HA$, nên K thuộc đường tròn $(H; HA)$ (kết quả quen thuộc), từ đó $HK = HM = HA$ hay $\triangle HKM$ cân tại H .

Cách 2: Ta có $AM \parallel BC$ nên $MAB = ABO$ (hai góc so le trong), từ đó suy ra hai tam giác cân

$$\triangle HAM \sim \triangle OAB \text{ (g.g), dẫn đến } \frac{AH}{AO} = \frac{AM}{AB} \text{ kéo theo } \triangle AHO \sim \triangle AMB \text{ (c.g.c).}$$

Bởi vậy $HOA = MBA = \frac{1}{2}AOK$ suy ra OH là tia phân giác của AOK , mà tam giác AOK cân tại O

nên OH là đường trung trực của AK , dẫn đến $HK = HA = HM$, hay $\triangle HKM$ cân tại H .

Câu V. (0,5 điểm) Một công ty dự định thuê một kho xưởng và điều động một số công nhân để hoàn thành đơn hàng 1000 sản phẩm. Chi phí thuê kho xưởng được tính theo ngày với giá 3 triệu đồng một ngày. Biết một ngày mỗi công nhân làm được 5 sản phẩm và công ty dự định thưởng mỗi công nhân 1 triệu đồng sau khi đơn hàng được hoàn thành. Công ty muốn tổng chi phí thuê kho xưởng và thưởng công nhân khi hoàn thành đơn hàng là nhỏ nhất. Hỏi công ty nên điều động bao nhiêu công nhân và thuê kho xưởng trong bao nhiêu ngày?

Hướng dẫn giải

Gọi số ngày thuê kho xưởng là x (ngày) và số công nhân cần điều động là y (người), $x, y \in \mathbb{N}^*$.

Mỗi ngày một công nhân làm được 5 sản phẩm nên trong x ngày, y công nhân làm được $5xy$ sản phẩm.

Theo đề bài ta có $5xy = 1000$ hay $xy = 200$.

Tổng chi phí thuê kho xưởng và thưởng công nhân là:

$$T = 3x + y = 3x + \frac{200}{x} \text{ (triệu đồng).}$$

Biến đổi biểu thức T :

$$T = 3x + \frac{200}{x} - 49 + 49 = \frac{3x^2 - 49x + 200}{x} + 49 = \frac{(x-8)(3x-25)}{x} + 49.$$

– Với $x = 8$ thì $T = 49$.

– Với $x > 8$, do $x \in \mathbb{N}$ nên $x \geq 9$, suy ra $(x-8)(3x-25) > 0$ do đó $T > 49$.

– Với $x < 8$, thì $(x-8)(3x-25) > 0$ suy ra $T > 49$.

Tóm lại với mọi x nguyên dương thì $T \geq 49$, dấu bằng xảy ra khi $x = 8$.

Khi $x = 8$ ta có $y = \frac{200}{8} = 25$.

Vậy công ty nên điều động 25 công nhân và thuê kho xưởng trong 8 ngày để chi phí là nhỏ nhất (49 triệu đồng).

—————**HẾT**—————