

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ ĐỒNG NAI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
NĂM HỌC 2026-2027

Môn: Toán chuyên

Thời gian làm bài 150 phút (không kể thời gian phát đề)
(Đề thi này gồm 02 trang, có 05 bài)

Bài 1. (2,0 điểm)

1. Rút gọn biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x}-12}{x-3\sqrt{x}+2} - \frac{7}{\sqrt{x}-1} + \frac{8}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$.
2. Cho phương trình $x^2 - 4x + m - 2 = 0$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - x_1x_2 = 3$.

Bài 2. (2,0 điểm)

1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x^3 - y^3 = x - y \\ 2x^2 + 5xy + 5y^2 = 1 \end{cases}$$
2. Cho đa thức $P(x)$. Biết rằng, khi chia $P(x)$ cho đa thức x ta được phần dư bằng 2026 và khi chia $P(x)$ cho đa thức $x^2 - 1$ ta được đa thức dư là $5x + 2044$. Tính $P(1)$ và tìm đa thức dư khi chia $P(x)$ cho đa thức $Q(x) = x(x^2 - 1)$.

Bài 3. (2,0 điểm)

1. Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho $p^2 + q^2 + 30$ là số chính phương.
2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. Chứng minh rằng:
a) $ab + bc + ca \leq 3$. b) $\frac{a}{\sqrt{2(a^4+7)}} + \frac{b}{\sqrt{2(b^4+7)}} + \frac{c}{\sqrt{2(c^4+7)}} \leq \frac{3}{4}$.

Bài 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nhọn, nội tiếp đường tròn (O) và có đường cao AD . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên các đường thẳng AB, AC .

1. Chứng minh rằng tứ giác $BCFE$ nội tiếp.
2. Kẻ đường kính AG của đường tròn (O) và gọi I là trung điểm đoạn thẳng GD . Chứng minh rằng $IE = IF$.
3. Gọi R là giao điểm của đường tròn (O) và đường thẳng AD ($R \neq A$), đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại hai điểm P, Q . Chứng minh rằng D là tâm đường tròn nội tiếp tam giác PQR .

Bài 5. (1,0 điểm)

1. Trong hộp có 5 quả bóng, mỗi quả được ghi một trong các số 1; 2; 3; 4; 5 (hai quả bóng khác nhau ghi hai số khác nhau). Bạn An chọn ngẫu nhiên đồng thời hai quả bóng trong hộp. Tính xác suất để bạn An chọn được hai quả bóng có tổng bình phương của hai số ghi trên hai quả bóng là một số nguyên tố.

2. Cho bảng ô vuông 6×6 (là bảng gồm 6 hàng và 6 cột, mỗi hàng và mỗi cột gồm 6 ô vuông) như hình vẽ bên dưới. Hỏi có thể ghi được hay không vào mỗi ô vuông của bảng một trong các số 1; 2; 3; 5 sao cho tổng các số trên mỗi hàng chia hết cho 11, đồng thời tổng các số trên mỗi cột chia hết cho 13?

1			3		
1	2	4	.	5	

Bảng 6×6

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO

TẠO

THÀNH PHỐ ĐỒNG NAI

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

Năm học 2026 - 2027

Môn: Toán chuyên

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

(Đề thi này gồm 02 trang, có 05 bài)

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1. (2,0 điểm)

1. Rút gọn biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x}-12}{x-3\sqrt{x}+2} - \frac{7}{\sqrt{x}-1} + \frac{8}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$.

2. Cho phương trình $x^2 - 4x + m - 2 = 0$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị nguyên của

tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - x_1 x_2 = 3$.

Bài 2. (2,0 điểm)

1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x^3 - y^3 = x - y \\ 2x^2 + 5xy + 5y^2 = 1 \end{cases}$$

2. Cho đa thức $P(x)$. Biết rằng, khi chia $P(x)$ cho đa thức x ta được phần dư bằng 2026 và khi chia $P(x)$ cho đa thức $x^2 - 1$ ta được đa thức dư là $5x + 2044$. Tính $P(1)$ và tìm đa thức dư khi chia $P(x)$ cho đa thức $Q(x) = x(x^2 - 1)$.

Bài 3. (2,0 điểm)

1. Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho $p^2 + q^2 + 30$ là số chính phương.

2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. Chứng minh rằng:

a) $ab + bc + ca \leq 3$.
b) $\frac{a}{\sqrt{2(a^4+7)}} + \frac{b}{\sqrt{2(b^4+7)}} + \frac{c}{\sqrt{2(c^4+7)}} \leq \frac{3}{4}$.

Bài 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nhọn, nội tiếp đường tròn (O) và có đường cao AD . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên các đường thẳng AB, AC .

1. Chứng minh rằng tứ giác $BCFE$ nội tiếp.

2. Kẻ đường kính AG của đường tròn (O) và gọi I và trung điểm đoạn thẳng GD . Chứng minh rằng $IE = IF$.

3. Gọi R là giao điểm của đường tròn (O) và đường thẳng AD ($R \neq A$), đường thẳng EF cắt đường tròn (O) .

Bài 5. (1,0 điểm)

1. Trong hộp có 5 quả bóng, mỗi quả được ghi một trong các số 1; 2; 3; 4; 5 (hai quả bóng khác nhau ghi hai số khác nhau). Bạn An chọn ngẫu nhiên đồng thời hai quả bóng trong hộp. Tính xác suất để bạn An chọn được hai quả bóng có tổng bình phương của hai số ghi hai quả bóng là một số nguyên tố.

2. Cho bảng ô vuông 6×6 (là bảng gồm 6 hàng và 6 cột, mỗi hàng và mỗi cột gồm 6 ô vuông) như hình vẽ bên dưới. Hỏi có thể ghi được hay không vào mỗi ô vuông của bảng một trong các số 1; 2; 3; 5 sao cho tổng các số trên mỗi hàng chia hết cho 11, đồng thời tổng các số trên mỗi cột chia hết cho 12?

Bảng 6×6

----HẾT----

(Khi làm bài thi này, thí sinh được sử dụng máy tính cầm tay, không được sử dụng tài liệu)

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1. (2,0 điểm)

1. Rút gọn biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x}-12}{x-3\sqrt{x}+2} - \frac{7}{\sqrt{x}-1} + \frac{8}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$.

2. Cho phương trình $x^2 - 4x + m - 2 = 0$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị nguyên của

tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - x_1 x_2 = 3$.

Hướng dẫn giải

1. Với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$, ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{2\sqrt{x}-12}{x-3\sqrt{x}+2} - \frac{7}{\sqrt{x}-1} + \frac{8}{\sqrt{x}-2} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-12-7\sqrt{x}+14+8\sqrt{x}-8}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{3\sqrt{x}-6}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{3(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} = \frac{3}{\sqrt{x}-1}. \end{aligned}$$

2. Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta' = 4 - m + 2 = 6 - m > 0$.

Điều này tương đương với $m < 6$. Theo định lý Viète, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 x_2 = m - 2 \end{cases}$.

Từ đẳng thức (1), ta suy ra $x_1, x_2 \neq 0$ nên $x_1 x_2 \neq 0$. Do đó, $m - 2 \neq 0$ hay $m \neq 2$. Khi đó:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - x_1 x_2 = 3$$

$$\frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} - x_1 x_2 = 3$$

$$\frac{4}{m-2} - (m-2) = 3$$

$$\frac{-m^2 + 4m - 4 + 4}{m-2} = 3$$

$$-m^2 + 4m = 3m - 6$$

$$m^2 - m - 6 = 0$$

Ta được $m = 3$ hoặc $m = -2$.

Kết hợp với $m < 6$ và $m \neq 2$, ta nhận cả hai giá trị này của m .

Vậy $m \in \{-2; 3\}$.

Bài 2. (2,0 điểm)

$$1. \text{ Giải hệ phương trình } \begin{cases} 3x^3 - y^3 = x - y \\ 2x^2 + 5xy + 5y^2 = 1 \end{cases}.$$

2. Cho đa thức $P(x)$. Biết rằng, khi chia $P(x)$ cho đa thức x ta được phần dư bằng 2026 và khi chia $P(x)$ cho đa thức $x^2 - 1$ ta được đa thức dư là $5x + 2044$. Tính $P(1)$ và tìm đa thức dư khi chia $P(x)$ cho đa thức $Q(x) = x(x^2 - 1)$.

Hướng dẫn giải

1. Từ hệ phương trình, ta thu được:

$$3x^3 - y^3 = (x - y)(2x^2 + 5xy + 5y^2)$$

$$3x^3 - y^3 = 2x^3 + 5x^2y + 5xy^2 - 2x^2y - 5xy^2 - 5y^3$$

$$x^3 - 3x^2y + 4y^3 = 0$$

$$(x + y)(x - 2y)^2 = 0$$

Suy ra $x = -y$ hoặc $x = 2y$.

Với $x = -y$ thay vào phương trình thứ hai ta được: $2y^2 = 1$ hay $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$(x, y) \in \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}.$$

Vậy trường hợp này ta thu được

Với $x = 2y$, thay vào phương trình thứ hai, ta được: $23y^2 = 1$ hay $y = \pm \frac{\sqrt{23}}{23}$.

$$(x, y) \in \left\{ \left(\frac{2\sqrt{23}}{23}; \frac{\sqrt{23}}{23} \right), \left(-\frac{2\sqrt{23}}{23}; -\frac{\sqrt{23}}{23} \right) \right\}.$$

Vậy trường hợp này thu được:

2. Ký hiệu $\deg H$ là bậc của một đa thức $H(x)$. Đặt

$$P(x) = Q(x) \cdot U(x) + V(x) \quad (2)$$

trong đó $U(x), V(x)$ là các đa thức và $\deg V < \deg Q = 3$. Do đó, $V(x)$ có dạng

$$V(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta được: $P(x) = x(x^2 - 1)U(x) + ax^2 + bx + c$ (4)

Vì khi chia $P(x)$ cho x ta được phần dư bằng 2026, nên theo định lý Bezout, ta suy ra $P(0) = 2026$

Từ (4) ta được $c = 2026$. Hơn nữa, khi chia $P(x)$ cho $x^2 - 1$ ta được đa thức dư là $5x + 2044$, nên theo định lý Bezout, ta được:

$$P(1) = 5 \cdot 1 + 2044 = 2049 \quad \text{và} \quad P(-1) = 5 \cdot (-1) + 2044 = 2039.$$

Kết hợp với (4), ta có:
$$\begin{cases} a + b + c = 2049 \\ a - b + c = 2039 \end{cases}$$

Hơn nữa $c = 2026$ nên ta suy ra $a = 18, b = 5$. Vậy đa thức dư trong phép chia $P(x)$ cho $Q(x)$ là:

$$V(x) = 18x^2 + 5x + 2026.$$

Bài 3. (2,0 điểm)

1. Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho $p^2 + q^2 + 30$ là số chính phương.

2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\text{a) } ab + bc + ca \leq 3. \quad \text{b) } \frac{a}{\sqrt{2(a^4 + 7)}} + \frac{b}{\sqrt{2(b^4 + 7)}} + \frac{c}{\sqrt{2(c^4 + 7)}} \leq \frac{3}{4}.$$

Hướng dẫn giải

1. Ta có một kết quả quen thuộc sau: Với x là số nguyên, ta có:

$$\begin{cases} x^2 \equiv 1 \pmod{3}, & \text{if } 3 \nmid x \\ x^2 \equiv 0 \pmod{3}, & \text{if } 3 \mid x \end{cases}$$

Nói cách khác, một số chính phương chỉ chia 3 dư 0 hoặc 1. Giả sử p và q là hai số nguyên tố cần tìm.

• Nếu p và q đều khác 3, mà p, q đều là số nguyên tố nên $3 \nmid p$ và $3 \nmid q$. Do đó:

$$p^2 + q^2 + 30 \equiv 1 + 1 + 30 \equiv 2 \pmod{3}$$

Do đó, $p^2 + q^2 + 30$ không thể là số chính phương.

• Nếu $p = 3$ thì $p^2 + q^2 + 30 = q^2 + 39$. Đặt $q^2 + 39 = k^2$ ($k \in \mathbb{N}$). Khi đó:

$$(k - q)(k + q) = 39.$$

$$\forall k - q < k + q \text{ và } k + q > 0 \text{ nên } \begin{cases} k - q = 1 \\ k + q = 39 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} k = 20 \\ q = 19 \end{cases}$$

$$\text{Hoặc } \begin{cases} k - q = 3 \\ k + q = 13 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} k = 8 \\ q = 5 \end{cases}.$$

Vậy trường hợp này ta được $(p; q) = (3; 19)$ hoặc $(p; q) = (3; 5)$.

• Nếu $q = 3$ tương tự trường hợp trên, ta thu được $(p; q) = (19; 3)$ hoặc $(p; q) = (5; 3)$

Vậy các bộ số thỏa mãn bài toán này là $(3; 5), (5; 3), (3; 19), (19; 3)$.

2. (a) Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$a^3 + b^3 + 1 \geq 3ab, \quad b^3 + c^3 + 1 \geq 3bc, \quad c^3 + a^3 + 1 \geq 3ac.$$

Cộng theo vế bất đẳng thức trên theo vế, ta được:

$$2(a^3 + b^3 + c^3) + 3 \geq 3(ab + bc + ac).$$

Kết hợp với $a^3 + b^3 + c^3 = 3$ suy ra $ab + bc + ca \leq 3$.

b) Trong ý này, ta sẽ sử dụng bất đẳng thức: $(u^2 + v^2)(x^2 + y^2) \geq (ux + vy)^2$ với mọi $u, v, x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có:
$$\frac{a}{\sqrt{2(a^4+7)}} = \frac{\sqrt{8a}}{\sqrt{2}\sqrt{(1+7)(a^4+7)}} \leq \frac{\sqrt{8a}}{\sqrt{2(a^2+7)^2}}$$

$$= \frac{2a}{a^2+7} = \frac{2a}{a^2+1+6} \leq \frac{2a}{2a+6} = \frac{a}{a+3} \quad (5)$$

Mặt khác, lại áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x+y+z+t} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right)$ với mọi $x, y, z, t > 0$ ta được:

$$\frac{a}{a+3} = \frac{a}{a+1+1+1} \leq a \cdot \frac{1}{16} \left(\frac{1}{a} + 3 \right) = \frac{1}{16} + \frac{3}{16}a \quad (6)$$

Từ (5) và (6) ta thu được:
$$\frac{a}{\sqrt{2(a^4+7)}} \leq \frac{1}{16} + \frac{3}{16}a$$

Tương tự, ta cũng có:
$$\frac{b}{\sqrt{2(b^4+7)}} \leq \frac{1}{16} + \frac{3}{16}b \quad \text{và} \quad \frac{c}{\sqrt{2(c^4+7)}} \leq \frac{1}{16} + \frac{3}{16}c$$

Cộng các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{a}{\sqrt{2(a^4+7)}} + \frac{b}{\sqrt{2(b^4+7)}} + \frac{c}{\sqrt{2(c^4+7)}} \leq \frac{3}{16} + \frac{3}{16}(a+b+c) \quad (7)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM có:

$$(a^3+1+1) \geq 3a, \quad b^3+1+1 \geq 3b \quad \text{và} \quad c^3+1+1 \geq 3c.$$

Do đó, $a^3+b^3+c^3+6 \geq 3(a+b+c)$ dẫn đến $a+b+c \leq 3$. Vì vậy, từ (7) ta kết luận:

$$\frac{a}{\sqrt{2(a^4+7)}} + \frac{b}{\sqrt{2(b^4+7)}} + \frac{c}{\sqrt{2(c^4+7)}} \leq \frac{3}{4}$$

Bài 4. (3,0 điểm)

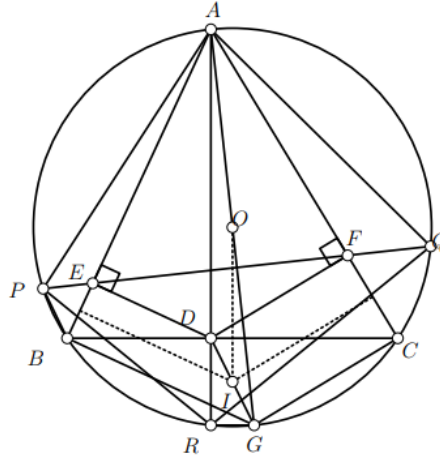
Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nhọn, nội tiếp đường tròn (O) và có đường cao AD . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên các đường thẳng AB, AC .

1. Chứng minh rằng tứ giác $BCFE$ nội tiếp.

2. Kẻ đường kính AG của đường tròn (O) và gọi I là trung điểm đoạn thẳng GD . Chứng minh rằng $IE = IF$.

3. Gọi R là giao điểm của đường tròn (O) và đường thẳng AD ($R \neq A$), đường thẳng EF cắt đường tròn (O) .

Hướng dẫn giải



1) Để chứng minh $BCFE$ nội tiếp, ta chứng minh $\angle AEF = \angle ACB$.

Xét tứ giác $AEDF$ có $\angle AED + \angle AFD = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, suy ra tứ giác $AEDF$ nội tiếp.

Suy ra $\angle AEF = \angle ADF$.

Mặt khác, $\angle ACD = \angle ADF$ (cùng phụ $\angle DAF$).

Từ đó suy ra $\angle AEF = \angle ACB$.

Vậy $BCFE$ nội tiếp.

2) Ta chứng minh I là tâm của $(BCFE)$.

Xét tam giác GAD có O là trung điểm AG , I là trung điểm DG nên OI là đường trung bình của tam giác GAD . Suy ra $OI \parallel DA$. Suy ra $OI \perp BC$. Mà $OB = OC$, suy ra OI là đường trung trực của BC . Suy ra $IB = IC$ (8).

Vì $ED \perp BA$, $BG \perp AB$ nên $ED \parallel BG$, từ đó $EDGB$ là hình thang. Gọi J là trung điểm của EB .

Khi đó, IJ là đường trung bình của hình thang $EDGB$. Suy ra $IJ \parallel EB$. Mà $GB \perp BE$ nên $IJ \perp BG$.

Suy ra $IE = IB$ (9).

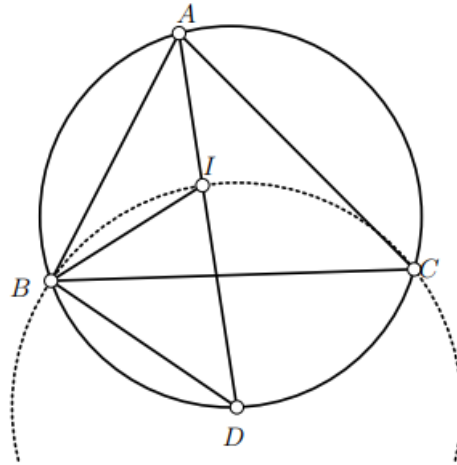
Tương tự như vậy, gọi H là trung điểm FC , ta chứng minh được H là trung trực của FC .

Suy ra $IF = IC$ (10).

Từ (8), (9), (10) suy ra $IB = IC = IF = IE$ và I là tâm của $(BCFE)$.

3) Ta có bổ đề sau: “Cho tam giác ABC nội tiếp (O) . Đường phân giác góc A cắt tại (O) tại D .

Lấy I trên AD sao cho $DI = DB$. Khi đó I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC ”



Chứng minh: Từ $DI = DB$, suy ra tam giác BDI cân tại D , suy ra $\widehat{DBI} = \widehat{DIB}$.

Ta có: $\widehat{IBC} = \widehat{IBD} - \widehat{DBC} = \widehat{DIB} - \widehat{DAC} = \widehat{ABI} + \widehat{BAI} - \widehat{CAD} = \widehat{ABI}$.

Suy ra BI là tia phân giác của $\widehat{B}$. Kết hợp AI là phân giác của $\widehat{A}$, ta được I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Để chứng minh D là tâm đường tròn nội tiếp của PQR , ta sẽ chứng minh RD là phân giác của $\widehat{PRQ}$ và $AP = AD$.

Ta có: $\widehat{GAC} + \widehat{AFE} = 90^\circ - \widehat{AGC} + \widehat{AFE} = 90^\circ - \widehat{ABC} + \widehat{AFE} = 90^\circ$.

Do đó, $AG \perp PQ$, mà $OP = OQ$ nên AG là đường trung trực của PQ .

Suy ra $AP = AQ$.

Suy ra $\triangle APQ$ cân tại A .

Suy ra $\widehat{APQ} = \widehat{AQP}$. Suy ra $\widehat{PRA} = \widehat{QRA}$. Suy ra RA là phân giác $\widehat{PRQ}$. (11)

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ADB , ta có: $AD^2 = AE \cdot AB$. Ta cần chứng minh được $AP^2 = AE \cdot AB$. Thật vậy, xét $\triangle APE$ và $\triangle ABP$, ta có: $\angle APE = \angle ABP (= \angle AQP)$ và $\angle PAE$ là góc chung.

Do đó, $\triangle APE \sim \triangle ABP$ (g.g). Suy ra $\frac{AP}{AE} = \frac{AB}{AP}$.

Suy ra $AP^2 = AB \cdot AE$, mà $AD^2 = AE \cdot AB$. Suy ra $AP = AD$. (12)

Từ (11), (12) và áp dụng bổ đề nêu trên, ta suy ra D là tâm đường tròn nội tiếp tam giác PQR .

Bài 5. (1,0 điểm)

1. Trong hộp có 5 quả bóng, mỗi quả được ghi một trong các số 1; 2; 3; 4; 5 (hai quả bóng khác nhau ghi hai số khác nhau). Bạn An chọn ngẫu nhiên đồng thời hai quả bóng trong hộp. Tính xác suất để bạn An chọn được hai quả bóng có tổng bình phương của hai số ghi hai quả bóng là một số nguyên tố.

2. Cho bảng ô vuông 6×6 (là bảng gồm 6 hàng và 6 cột, mỗi hàng và mỗi cột gồm 6 ô vuông) như hình vẽ bên dưới. Hỏi có thể ghi được hay không vào mỗi ô vuông của bảng một trong các số 1; 2; 3; 5 sao cho tổng các số trên mỗi hàng chia hết cho 11, đồng thời tổng các số trên mỗi cột chia hết cho 12?

Bảng 6×6

Hướng dẫn giải

1. Số cách chọn đồng thời hai quả bóng trong hộp là $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ (cách)

Ngoài ra, ta nhận thấy có đúng 5 cặp số (a, b) ($1 \leq a < b \leq 5$) sao cho $a^2 + b^2$ là số nguyên tố, đó là:

$$(a, b) \in \{(1; 2), (2; 3), (2; 5), (1; 4), (4; 5)\}.$$

Do bạn An chọn đồng thời hai quả bóng nên cặp bóng (a, b) cũng là cặp bóng (b, a) .

Vì vậy, xác suất bạn An chọn được 2 quả bóng theo yêu cầu bài toán là: $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

2. Giả sử tồn tại một cách ghi thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vì mỗi ô trong bảng chỉ được điền các số 1; 2; 3; 5 nên chỉ có hai nhận xét sau:

- Vì tổng các số trên mỗi hàng chia hết cho 11 nên tổng lớn nhất có thể thu được là:

$$5 + 5 + 5 + 5 + 1 + 1 = 22 = 2 \cdot 11$$

- Vì tổng các số trên mỗi cột chia hết cho 13 nên tổng lớn nhất có thể thu được là

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 1 = 26 = 2 \cdot 13.$$

Khi đó, tổng tất cả các số của 6 hàng có dạng $11h_i$ ($h_i \in \{1; 2\}; 1 \leq i \leq 6$) và tổng tất cả các số của 6 cột có dạng $13c_j$ ($c_j \in \{1; 2\}; 1 \leq j \leq 6$).

Gọi A là tổng các số trong tất cả 36 ô trong bảng.

Khi đó: $A = 11(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5) = 13(c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5) \quad (13)$

Suy ra A chia hết cho 11 và A chia hết cho 13, mà $\gcd(11; 13) = 1$ nên $A \equiv 143$. Từ (13) và $h_i, c_i \in \{1; 2\}$, ta suy ra $11(1+1+1+1+1) \leq A \leq 13(2+2+2+2+2)$

$$66 \leq A \leq 156$$

Kết hợp $A \equiv 143$ ta thu được $A = 143$. Tuy nhiên:

$$A = 11(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5) \leq 11(2+2+2+2+2) = 132 < 144.$$

Điều này vô lý do $A \equiv 143$. Như vậy không tồn tại cách ghi thỏa mãn bài toán.