

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
KHÁNH HÒA**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang)

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2026 - 2027**

Môn thi: TOÁN
Ngày thi: 29/05/2026
Thời gian: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1 (2,00 điểm).

a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{x}{x-2\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}+2} + \frac{8}{x-4}$, với $x \geq 0, x \neq 4$.

b) Cho đa thức bậc ba $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với hệ số nguyên. Biết $P(\sqrt{5}) = 5$ và $P(\sqrt[3]{5}) = 5\sqrt[3]{5}$.
Tính $P(1)$.

Câu 2 (2,00 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$.

b) Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích xác định. Nếu tăng chiều dài thêm 3 m và tăng chiều rộng 2 m thì diện tích tăng thêm 141 m². Nếu giảm chiều dài 4 m và giảm chiều rộng 5 m thì diện tích giảm đi 230 m². Tính diện tích của mảnh vườn.

Câu 3 (1,50 điểm).

a) Tìm tất cả các cặp số (m, p) với m là số nguyên dương và p là số nguyên tố thỏa mãn đẳng thức $p^2 + pm = m^3$.

b) Tìm số tự nhiên a để $(a^2 - 8)^2 + 36$ là số nguyên tố.

Câu 4 (3,00 điểm).

Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B cố định nằm trên đường tròn, AB không là đường kính. Điểm C di động trên cung lớn AB sao cho ABC là tam giác nhọn và $CA < CB$. Điểm D là hình chiếu của C trên đường thẳng AB . Kẻ đường kính CI của đường tròn (O) , đường thẳng qua B vuông góc với CI cắt CI tại E .

a) Chứng minh tứ giác $BCDE$ nội tiếp.

b) Chứng minh $CD \cdot CI = CA \cdot CB$ và DE song song với AI .

c) Gọi F là hình chiếu của điểm A trên CI . Chứng minh khi điểm C di động thì tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác DEF là một điểm cố định.

Câu 5 (1,50 điểm).

a) Cho tập hợp X gồm 2026 số nguyên tùy ý. Chứng minh tồn tại một tập hợp T là tập hợp con của tập hợp X sao cho tổng các phần tử của tập hợp T chia hết cho 2026.

b) Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh $(1+a)^2(1+b)^3(1+c)^4 > 256$.

HẾT

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

LỜI GIẢI CÂU 1 (2,00 ĐIỂM)

GHI CHÚ: Rút gọn biểu thức bằng cách quy đồng theo nhân tử $\sqrt{x} - 2$; phần đa thức dùng tính độc lập của các căn thức trên $\mathbb{Q}$.

a) Rút gọn biểu thức.

Với điều kiện $x > 0, x \neq 4$, ta biến đổi biểu thức A :

$$\begin{aligned} A &= \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} + \frac{2}{\sqrt{x}+2} + \frac{8}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2) + 2(\sqrt{x}-2) + 8}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x + 4\sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}. \end{aligned}$$

b) Tính $P(1)$.

Thay $x = \sqrt{5}$ vào đa thức, ta được: $P(\sqrt{5}) = (5b + d) + (5a + c)\sqrt{5} = 5$.

Vì $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ và $\sqrt{5}$ vô tỉ nên:
$$\begin{cases} 5b + d = 5 \\ 5a + c = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Thay $x = \sqrt[3]{5}$ vào đa thức: $P(\sqrt[3]{5}) = (5a + d) + c\sqrt[3]{5} + b\sqrt[3]{25} = 5\sqrt[3]{5}$.

Đồng nhất hệ số:
$$\begin{cases} 5a + d = 0 \\ c = 5 \\ b = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (2) thay vào (1): $d = 5 \Rightarrow a = -1$. Đa thức là $P(x) = -x^3 + 5x + 5 \Rightarrow P(1) = 9$.

LỜI GIẢI CÂU 2 (2,00 ĐIỂM)

GHI CHÚ: Phần phương trình dùng liên hợp để so sánh hai vế; phần hình chữ nhật chuyển điều kiện diện tích thành hệ tuyến tính.

a) Giải phương trình.

Tập xác định: $\mathbb{R}$. Phương trình tương đương: $\sqrt{x^2 + 12} - \sqrt{x^2 + 5} = 3x - 5$.

Nhân lượng liên hợp:
$$\frac{7}{\sqrt{x^2 + 12} + \sqrt{x^2 + 5}} = 3x - 5 \quad (*)$$

Vế trái luôn dương, điều kiện có nghiệm $3x - 5 > 0 \iff x > \frac{5}{3}$.

Nhận thấy $x = 2$ là một nghiệm. Với $x > 2$, $VT < 1, VP > 1$ (vô nghiệm). Với $\frac{5}{3} < x < 2$, $VT > 1, VP < 1$ (vô nghiệm). Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất.

b) Bài toán hình chữ nhật.

Gọi chiều dài là x và chiều rộng là y (m) ($x > y > 5$). Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x+3)(y+2) = xy + 141 \\ (x-4)(y-5) = xy - 230 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 3y = 135 \\ 5x + 4y = 250 \end{cases}$$

Giải hệ thu được $x = 30, y = 25$. Diện tích $S = 750 \text{ (m}^2\text{)}$.

LỜI GIẢI CÂU 3 (1,50 ĐIỂM)

GHI CHÚ: Tách theo ước chung của p và m , sau đó phân tích nhân tử để buộc một thừa số bằng 1 khi biểu thức là số nguyên tố.

a) Giải phương trình nghiệm nguyên.

Ta có: $p(p+m) = m^3$. Gọi $d = \gcd(p, m) \Rightarrow d \in \{1, p\}$.

- Nếu $d = 1, p \mid m^3 \Rightarrow p = 1$ (vô lý vì p nguyên tố).

- Nếu $d = p \Rightarrow m = pk$ ($k \in \mathbb{Z}^+$). Thay vào: $1 + k = pk^3 \iff 1 = k(pk^2 - 1)$.

Do $k \in \mathbb{Z}^+$ nên $k = 1 \Rightarrow p - 1 = 1 \Rightarrow p = 2$ (thỏa mãn). Từ đó $m = 2$.

Cặp số cần tìm là $(m, p) = (2, 2)$.

b) Tìm a để biểu thức là số nguyên tố.

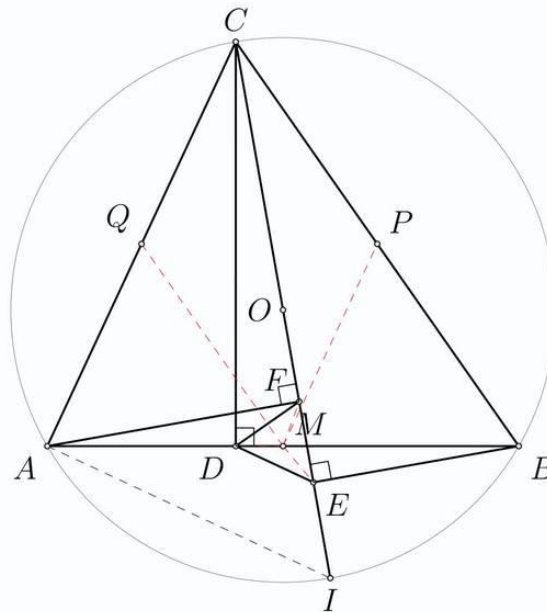
$$A = a^4 - 16a^2 + 100 = (a^2 + 10)^2 - (6a)^2 = (a^2 - 6a + 10)(a^2 + 6a + 10).$$

Vì $a \in \mathbb{N}$ nên $a^2 + 6a + 10 > a^2 - 6a + 10$. Để A nguyên tố, nhân tử nhỏ hơn phải bằng 1:

$$a^2 - 6a + 10 = 1 \iff (a - 3)^2 = 0 \iff a = 3. \text{ (Thử lại } A = 37 \text{ là số nguyên tố).}$$

LỜI GIẢI CÂU 4 (3,00 ĐIỂM)

GHI CHÚ: Tận dụng các góc vuông để nhận ra tứ giác nội tiếp, rồi dùng đường trung bình và đường trung trực để chứng minh tâm cổ định.



a) Chứng minh tứ giác $BCDE$ nội tiếp.

Ta có $CD \perp AB \Rightarrow \widehat{CDB} = 90^\circ$ và $BE \perp CI \Rightarrow \widehat{CEB} = 90^\circ$.

Hai đỉnh D, E cùng nhìn cạnh BC dưới góc 90° nên $BCDE$ nội tiếp đường tròn đường kính BC .

b) Chứng minh $CD \cdot CI = CA \cdot CB$ và $DE \parallel AI$.

- Ý 1:** $\triangle CDA$ và $\triangle CBI$ có $\widehat{CDA} = \widehat{CBI} = 90^\circ$ và $\widehat{CAD} = \widehat{CIB}$ (cùng chắn cung CB).
 $\Rightarrow \triangle CDA \sim \triangle CBI$ (g.g) $\Rightarrow \frac{CD}{CA} = \frac{CB}{CI} \Rightarrow CD \cdot CI = CA \cdot CB$.
- Ý 2:** Tứ giác $BCDE$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{CBE} = 90^\circ - \widehat{BCI} = 90^\circ - \widehat{BAI}$.
 Lại có $\widehat{CAI} = 90^\circ \Rightarrow AI \perp AC$, đồng thời $\widehat{ACD} = 90^\circ - \widehat{CAD} = 90^\circ - \widehat{BAI}$.
 Từ đó suy ra $\widehat{CDE} = \widehat{ACD}$, dẫn đến $DE \perp AC$. Vậy $DE \parallel AI$ (cùng vuông góc AC).

c) Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle DEF$ cố định.

Gọi M, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC và CA . Ta sẽ chứng minh M là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle DEF$.

- **Chứng minh $MD = ME$:**
 Tứ giác $BCDE$ nội tiếp đường tròn tâm P đường kính BC , do đó DE là một dây cung của đường tròn (P) .
 Theo chứng minh ở ý b, ta có $DE \parallel AI$ và $AI \perp AC \Rightarrow DE \perp AC$.
 Mặt khác, MP là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow MP \parallel AC$.
 Từ hai điều trên suy ra $MP \perp DE$.
 Trong đường tròn (P) , đường thẳng MP đi qua tâm P và vuông góc với dây cung DE nên MP chính là đường trung trực của đoạn thẳng DE .
 Vì M thuộc đường trung trực của DE nên $MD = ME$ (1).
- **Chứng minh $MD = MF$:**

Tứ giác $ACDF$ có $\widehat{ADC} = 90^\circ$ (do $CD \perp AB$) và $\widehat{AFC} = 90^\circ$ (do $AF \perp CI$). Hai đỉnh D và F cùng nhìn cạnh AC dưới một góc vuông nên tứ giác $ACDF$ nội tiếp đường tròn tâm Q đường kính AC . Suy ra FD là một dây cung của đường tròn (Q).

Trong đường tròn (Q), ta có $\widehat{CFD} = \widehat{CAD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CD). Lại có, trong đường tròn (O), $\widehat{CBI} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên tam giác CBI vuông tại B . Suy ra $\widehat{BCI} = 90^\circ - \widehat{CIB}$.

Mà $\widehat{CIB} = \widehat{CAB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CB) $\Rightarrow \widehat{BCI} = 90^\circ - \widehat{CAB}$.

Gọi K là giao điểm của FD và BC . Xét $\triangle CKF$, tổng hai góc nhọn là:

$$\widehat{CFK} + \widehat{FCK} = \widehat{CFD} + \widehat{BCI} = \widehat{CAB} + (90^\circ - \widehat{CAB}) = 90^\circ$$

Do đó $\triangle CKF$ vuông tại $K \Rightarrow \widehat{CKF} = 90^\circ \Rightarrow FD \perp BC$.

Mặt khác, MQ là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow MQ \parallel BC$.

Từ hai điều kiện $FD \perp BC$ và $MQ \parallel BC$, ta suy ra $MQ \perp FD$.

Xét trong đường tròn (Q), đường thẳng MQ đi qua tâm Q và vuông góc với dây cung FD nên MQ chính là đường trung trực của đoạn thẳng FD .

Vì M nằm trên đường trung trực của FD nên $MD = MF$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $MD = ME = MF$, chứng tỏ M là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle DEF$. Vì A và B cố định nên trung điểm M của AB cũng là một điểm cố định. (Điều phải chứng minh).

LỜI GIẢI CÂU 5 (1,50 ĐIỂM)

GHI CHÚ: Ý a dùng nguyên lý Dirichlet trên các tổng tiền tố; ý b dùng AM-GM có chọn điểm rơi và kiểm tra điều kiện xảy ra dấu bằng.

a) Ứng dụng Dirichlet.

Thiết lập 2026 tổng tiền tố: $S_k = a_1 + \dots + a_k$ ($k = 1 \dots 2026$).

Nếu có tổng $S_k : 2026$, ta chọn $T = \{a_1, \dots, a_k\}$.

Nếu không có tổng nào chia hết cho 2026, số dư chỉ nhận 2025 giá trị (từ 1 đến 2025).

Theo Dirichlet, tồn tại ít nhất 2 tổng có cùng số dư, giả sử S_m, S_n ($m < n$). Khi đó

$S_n - S_m = a_{m+1} + \dots + a_n : 2026$. Ta chọn $T = \{a_{m+1}, \dots, a_n\}$.

b) Bất đẳng thức AM-GM.

Áp dụng AM-GM và kỹ thuật tách hạng tử:

$$(1+a)^2 \geq 4a$$

$$1+b = b + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b}{4}} \Rightarrow (1+b)^3 \geq \frac{27}{4}b$$

$$1+c = c + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \geq 4\sqrt[4]{\frac{c}{27}} \Rightarrow (1+c)^4 \geq \frac{256}{27}c$$

Nhân vế theo vế: $(1+a)^2(1+b)^3(1+c)^4 \geq 4a \cdot \frac{27}{4}b \cdot \frac{256}{27}c = 256abc = 256$.

Dấu "=" xảy ra khi $a = 1, b = 1/2, c = 1/3 \Rightarrow abc = 1/6 \neq 1$ (trái giả thiết).

Vậy hệ điều kiện dấu "=" vô nghiệm, ta có bất đẳng thức ngặt > 256 .