

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BẮC NINH**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

**ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2026 - 2027**

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Họ, tên thí sinh: Số báo danh:

Câu 1. (2,0 điểm)

1) Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{1 - 2\sqrt{x} + x}$ khi $x = 20 - \sqrt[3]{\frac{32}{3\sqrt{3} - 5}} + \sqrt[3]{\frac{32}{3\sqrt{3} + 5}}$.

2) Cho hàm số bậc nhất $y = \frac{m}{3m-2}x + \frac{m-1}{3m-2}$ (m là tham số) có đồ thị là đường thẳng d . Tìm m để đường thẳng d cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho $AB = \sqrt{2}$.

Câu 2. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình: $\frac{3x}{\sqrt{x+4}+2} - \frac{3x}{\sqrt{1-x}+1} + \frac{12x}{\sqrt{3x+9}+3} = x^2 + 7x$.

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + (x-1)(y+1) = 2y^2 - 1 \\ x^2 + y^2 - 10 = 0 \end{cases}$$

Câu 3. (1,5 điểm)

1) Cho đa thức $P(x) = -x^3 - 4x^2 + 26x + d$ với d là tham số thực. Tìm hai số thực phân biệt m, n thỏa mãn $P(m) = P(n) = 0$ và tích $m.n$ nhỏ nhất.

2) Tìm tất cả các số nguyên tố p, q, r thỏa mãn $(p+1)(q+2)(r+3) = 4pqr$.

Câu 4. (3,0 điểm)

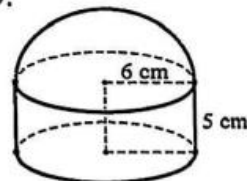
1) Cho tam giác ABC có trực tâm H , $\widehat{BAC} > 90^\circ$ và nội tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại S . Gọi M, I lần lượt là trung điểm các cạnh BC và AH .

a) Chứng minh rằng I là trực tâm tam giác SAM .

b) Gọi K là giao điểm thứ hai của đường thẳng AM với đường tròn đường kính AH . Chứng minh rằng SK tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BCK .

2) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, lấy một điểm P bất kỳ thuộc miền trong của tam giác. Chứng minh khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách từ điểm P đến các đỉnh A, B, C của tam giác không nhỏ hơn 2 lần khoảng cách bé nhất trong các khoảng cách từ điểm P đến các cạnh của tam giác ABC .

3) Một vật dụng đựng mỹ phẩm được thiết kế gồm hai phần, phần thân là hình trụ có một đáy dưới là hình tròn với bán kính $r = 6$ cm, chiều cao $h = 5$ cm và phần nắp là một nửa hình cầu bán kính $r = 6$ cm (tham khảo hình vẽ). Người ta cần sơn mặt ngoài (bao gồm cả đáy) của vật dụng đó, tính diện tích cần sơn.



Câu 5. (1,5 điểm)

1) Có hai tấm bia hình tròn I và II ngoài nhau gắn trên cùng một mặt phẳng. Tấm bia I được chia thành 4 hình quạt như nhau ghi số lần lượt từ 1 đến 4. Tấm bia II được chia thành 6 hình quạt như nhau ghi số lần lượt từ 1 đến 6. Trục quay của mỗi tấm bia được gắn mũi tên cố định ở tâm. Người ta thiết kế để khi quay hai tấm bia đến khi chúng dừng lại thì mũi tên gắn trên trục quay ở mỗi tấm bia chỉ thuộc ngẫu nhiên bên trong một hình quạt nào đó. Trong trò chơi "Vòng quay may mắn", người chơi sẽ quay lần lượt hai tấm bia. Khi hai bia dừng lại, mũi tên của tấm bia I ở hình quạt ghi số x , mũi tên của tấm bia II ở hình quạt ghi số y . Người chơi sẽ nhận được quà nếu $x + y$ là một số nguyên tố. Tính xác suất để người chơi nhận được quà.

2) Cho 29 điểm trên mặt phẳng, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Người ta muốn tô màu tất cả các đoạn thẳng nối giữa chúng, sao cho mỗi đoạn thẳng được tô bởi đúng 1 màu và không có tam giác nào có hai cạnh cùng màu. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu màu để tô được như vậy?

3) Cho các số thực a, b, c thay đổi và thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 \geq 4 + 3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$T = a + b + c + \sqrt{2}(|a-b| + |b-c| + |c-a|).$$

-----HẾT-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
TỈNH BẮC NINH
ĐỀ THI CHÍNH THỨC

NĂM HỌC 2026 – 2027

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. (2,0 điểm)

1) Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{1 - 2\sqrt{x} + x}$ khi $x = 20 - \sqrt[3]{\frac{32}{3\sqrt{3} - 5}} + \sqrt[3]{\frac{32}{3\sqrt{3} + 5}}$.

2) Cho hàm số bậc nhất $y = \frac{m}{3m-2}x + \frac{m-1}{3m-2}$ (m là tham số) có đồ thị là đường thẳng d . Tìm

m để đường thẳng d cắt các trục tọa độ Ox , Oy lần lượt tại A , B sao cho $AB = \sqrt{2}$.

Câu 2. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình: $\frac{3x}{\sqrt{x+4}+2} - \frac{3x}{\sqrt{1-x}+1} + \frac{12x}{\sqrt{3x+9}+3} = x^2 + 7x$.

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + (x-1)(y+1) = 2y^2 - 1 \\ x^2 + y^2 - 10 = 0 \end{cases}$$

Câu 3. (1,5 điểm)

1) Cho đa thức $P(x) = -x^3 - 4x^2 + 26x + d$ với d là tham số thực. Tìm hai số thực phân biệt m, n thỏa mãn $P(m) = P(n) = 0$ và tích $m \cdot n$ nhỏ nhất.

2) Tìm tất cả các số nguyên tố p, q, r thỏa mãn $(p+1)(q+2)(r+3) = 4pqr$.

Câu 4. (3,0 điểm)

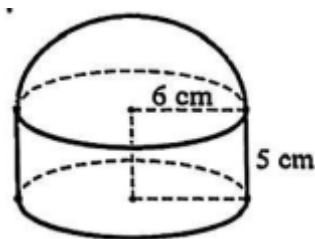
1) Cho tam giác ABC có trực tâm H , $BAC > 90^\circ$ và nội tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại S . Gọi M, I lần lượt là trung điểm các cạnh BC và AH .

a) Chứng minh rằng I là trực tâm tam giác SAM .

b) Gọi K là giao điểm thứ hai của đường thẳng AM với đường tròn đường kính AH . Chứng minh rằng SK tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BCK .

2) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, lấy một điểm P bất kỳ thuộc miền trong của tam giác. Chứng minh khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách từ điểm P đến các đỉnh A, B, C của tam giác không nhỏ hơn 2 lần khoảng cách bé nhất trong các khoảng cách từ điểm P đến các cạnh của tam giác ABC .

3) Một vật dụng đựng mỹ phẩm được thiết kế gồm hai phần, phần thân là hình trụ có một đáy dưới là hình tròn với bán kính $r = 6$ cm, chiều cao $h = 5$ cm và phần nắp là một nửa hình cầu bán kính $r = 6$ cm (tham khảo hình vẽ). Người ta cần sơn mặt ngoài (bao gồm cả đáy) của vật dụng đó, tính diện tích cần sơn.



Câu 5. (1,5 điểm)

1) Có hai tấm bìa hình tròn I và II ngoài nhau gắn trên cùng một mặt phẳng. Tấm bìa I được chia thành 4 hình quạt như nhau ghi số lần lượt từ 1 đến 4. Tấm bìa II được chia thành 6 hình quạt như nhau ghi số lần lượt từ 1 đến 6. Trục quay của mỗi tấm bìa được gắn mũi tên cố định ở tâm. Người ta thiết kế để khi quay hai tấm bìa đến khi chúng dừng lại thì mũi tên gắn trên trục quay ở mỗi tấm bìa chỉ thuộc ngẫu nhiên bên trong một hình quạt nào đó. Trong trò chơi “Vòng quay may mắn”, người chơi sẽ quay lần lượt hai tấm bìa. Khi hai bìa dừng lại, mũi tên của tấm bìa I ở hình quạt ghi số x , mũi tên của tấm bìa II ở hình quạt ghi số y . Người chơi sẽ nhận được quà nếu $x + y$ là một số nguyên tố. Tính xác suất để người chơi nhận được quà.

2) Cho 29 điểm trên mặt phẳng, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Người ta muốn tô màu tất cả các đoạn thẳng nối giữa chúng, sao cho mỗi đoạn thẳng được tô bởi đúng 1 màu và không có tam giác nào có hai cạnh cùng màu. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu màu để tô được như vậy?

3) Cho các số thực a, b, c thay đổi và thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 \geq 4 + 3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = a + b + c + \sqrt{2}(|a - b| + |b - c| + |c - a|)$.

—————HẾT—————

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**TỈNH BẮC NINH****ĐỀ THI CHÍNH THỨC****Đáp án và hướng dẫn giải****KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN****NĂM HỌC 2026 – 2027****Môn thi: TOÁN**

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. (2,0 điểm)

1) Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{1 - 2\sqrt{x} + x}$ khi $x = 20 - \sqrt[3]{\frac{32}{3\sqrt{3} - 5}} + \sqrt[3]{\frac{32}{3\sqrt{3} + 5}}$.

2) Cho hàm số bậc nhất $y = \frac{m}{3m-2}x + \frac{m-1}{3m-2}$ (m là tham số) có đồ thị là đường thẳng d . Tìm

m để đường thẳng d cắt các trục tọa độ Ox , Oy lần lượt tại A , B sao cho $AB = \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

1) Ta có $\frac{32}{3\sqrt{3} - 5} = \frac{32(3\sqrt{3} + 5)}{(3\sqrt{3} - 5)(3\sqrt{3} + 5)} = \frac{32(3\sqrt{3} + 5)}{27 - 25} = 16(3\sqrt{3} + 5) = 48\sqrt{3} + 80$.

Từ đó $\sqrt[3]{\frac{32}{3\sqrt{3} - 5}} = \sqrt[3]{(2 + 2\sqrt{3})^3} = 2 + 2\sqrt{3}$.

Tương tự $\sqrt[3]{\frac{32}{3\sqrt{3} + 5}} = \sqrt[3]{(2\sqrt{3} - 2)^3} = 2\sqrt{3} - 2$.

Vì vậy $x = 20 - (2 + 2\sqrt{3}) + (2\sqrt{3} - 2) = 20 - 2 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2 = 16$.

Khi đó $P = \frac{1}{1 - 2\sqrt{16} + 16} = \frac{1}{1 - 8 + 16} = \frac{1}{9}$.

2) Điều kiện xác định: $m \neq \frac{2}{3}$.

Đề (d) cắt Ox , Oy tại A , B khác O thì $m \neq 1$.

Đường thẳng d cắt trục tung Oy tại điểm $B(0; y_B)$ với $y_B = \frac{m-1}{3m-2}$ suy ra $OB = \left| \frac{m-1}{3m-2} \right| > 0$.

Đường thẳng d cắt trục hoành Ox tại điểm $A(x_A; 0)$ với:

$$0 = \frac{m}{3m-2}x_A + \frac{m-1}{3m-2} \Rightarrow x_A = -\frac{m-1}{m} \Rightarrow OA = \left| \frac{m-1}{m} \right| > 0.$$

Vì tam giác OAB vuông tại O , theo định lý Pythagore ta có:

$$OA^2 + OB^2 = AB^2 \text{ suy ra } \left(\frac{m-1}{m} \right)^2 + \left(\frac{m-1}{3m-2} \right)^2 = 2.$$

Suy ra $(m-1)^2 \left[\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(3m-2)^2} \right] = 2.$

$$(m-1)^2 \left[(3m-2)^2 + m^2 \right] = 2m^2 (3m-2)^2$$

$$(2m-1)^2 (m^2 + 2m - 2) = 0.$$

Do đó $m = \frac{1}{2}$ và $m = -1 \pm \sqrt{3}$, thỏa mãn điều kiện.

Câu 2. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình: $\frac{3x}{\sqrt{x+4}+2} - \frac{3x}{\sqrt{1-x}+1} + \frac{12x}{\sqrt{3x+9}+3} = x^2 + 7x.$

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + (x-1)(y+1) = 2y^2 - 1 \\ x^2 + y^2 - 10 = 0 \end{cases}.$$

Hướng dẫn giải

1) Điều kiện xác định: $-3 \leq x \leq 1.$

Phương trình đã cho tương đương với:

$$x \left(\frac{3}{\sqrt{x+4}+2} - \frac{3}{\sqrt{1-x}+1} + \frac{12}{\sqrt{3x+9}+3} \right) = x(x+7)$$

$$x = 0 \text{ hoặc } \frac{3}{\sqrt{x+4}+2} - \frac{3}{\sqrt{1-x}+1} + \frac{12}{\sqrt{3x+9}+3} = x+7 \quad (*)$$

Trường hợp 1: $x = 0$ (thỏa mãn ĐKXĐ).

Trường hợp 2: Xét phương trình (*):

$$\frac{3}{\sqrt{x+4}+2} + \frac{12}{\sqrt{3x+9}+3} = x+7 + \frac{3}{\sqrt{1-x}+1}$$

Vế trái (VT) của (*) có giá trị:

$$VT_{(*)} \leq \frac{3}{\sqrt{-3+4}+2} + \frac{12}{\sqrt{3(-3)+9}+3} = \frac{3}{1+2} + \frac{12}{0+3} = 1+4 = 5.$$

Vế phải (VP) của (*) có giá trị:

$$VP_{(*)} \geq -3+7 + \frac{3}{\sqrt{1-(-3)}+1} = 4 + \frac{3}{2+1} = 4+1 = 5.$$

Do đó, $VT_{(*)} \leq 5 \leq VP_{(*)}.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = -3$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Với $x < -3$ (không thuộc tập ĐKXĐ).

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{0; -3\}.$

2) Từ phương trình đầu ta được:

$$x^2 + (x-1)(y+1) = 2y^2 - 1$$

$$x^2 + xy - 2y^2 + x - y = 0$$

$$(x^2 - y^2) + (xy - y^2) + (x - y) = 0$$

$$(x - y)(x + 2y + 1) = 0.$$

• Với $x = y$, thay vào phương trình sau ta được $2x^2 = 10$ suy ra $x = \pm\sqrt{5}$.

Ta có cặp nghiệm $(\sqrt{5}; \sqrt{5}), (-\sqrt{5}; -\sqrt{5})$.

• Với $x = -2y - 1$, thay vào phương trình sau ta được:

$$(-2y - 1)^2 + y^2 - 10 = 0 \text{ suy ra } 5y^2 + 4y - 9 = 0 \text{ nên } (5y + 9)(y - 1) = 0.$$

Ta được $y = 1$, suy ra $x = -3$

$$\text{hoặc } y = -\frac{9}{5}, \text{ suy ra } x = \frac{13}{5}.$$

Vậy hệ phương trình có các cặp nghiệm $(x; y)$ là: $(\sqrt{5}; \sqrt{5}), (-\sqrt{5}; -\sqrt{5}), (-3; 1), (\frac{13}{5}; -\frac{9}{5})$.

Câu 3. (1,5 điểm)

1) Cho đa thức $P(x) = -x^3 - 4x^2 + 26x + d$ với d là tham số thực. Tìm hai số thực phân biệt m, n thỏa mãn $P(m) = P(n) = 0$ và tích $m \cdot n$ nhỏ nhất.

2) Tìm tất cả các số nguyên tố p, q, r thỏa mãn $(p+1)(q+2)(r+3) = 4pqr$.

Hướng dẫn giải

1) Đặt $Q(x) = x^3 + 4x^2 - 26x$ thì $P(x) = d - Q(x)$, do đó $Q(m) = Q(n) = d$.

Ta có $Q(m) - Q(n) = m^3 - n^3 + 4(m^2 - n^2) - 26(m - n)$.

Vì $m \neq n$, ta chia cho $(m - n)$:

$$0 = \frac{Q(m) - Q(n)}{m - n} = m^2 + mn + n^2 + 4(m + n) - 26.$$

Đặt $S = m + n$ và $P = mn$ thì $S^2 - P + 4S - 26 = 0$ suy ra $P = S^2 + 4S - 26 = (S + 2)^2 - 30 \geq -30$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $S = m + n = -2$, $P = mn = -30$.

Khi đó m, n là nghiệm của phương trình $X^2 + 2X - 30 = 0$ là $-1 - \sqrt{31}; -1 + \sqrt{31}$.

Thay vào tính được $d = Q(m) = Q(n) = 60$.

Hai số thực phân biệt cần tìm là $-1 - \sqrt{31}$ và $-1 + \sqrt{31}$.

2) Viết lại phương trình dưới dạng: $\left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{2}{q}\right)\left(1 + \frac{3}{r}\right) = 4$.

– Trường hợp 1: $p = 2$. Phương trình trở thành:

$$3(q+2)(r+3) = 8qr$$

$$5qr - 9q - 6r = 18$$

$$q(5r-9) = 6r+18$$

$$q = \frac{6r+18}{5r-9}.$$

Vì $q \geq 2$ nên $\frac{6r+18}{5r-9} \geq 2$ suy ra $4r \leq 36$ do đó $r \leq 9$.

Vì r nguyên tố nên $r \in \{2; 3; 5; 7\}$.

Thay vào: $r = 2$ suy ra $q = 30$ (loại);

$r = 3$ suy ra $q = 6$ (loại);

$r = 5$ suy ra $q = 3$ (nhận);

$r = 7$ suy ra $q = \frac{30}{13}$ (loại).

Ta được bộ (2; 3; 5).

– Trường hợp 2: $q = 2$. Tương tự ta có $p = \frac{r+3}{r-3} = 1 + \frac{6}{r-3}$. Thử không có nghiệm thỏa mãn.

– Trường hợp 3: $r = 2$. Tương tự ta có $p = \frac{5q+10}{3q-10}$ suy ra $q \leq 30$. Thử được $q = 5$ suy ra $p = 7$.

Ta được bộ (7; 5; 2).

– Trường hợp 4: $p, q, r \geq 3$. Nếu $q \geq 5$ và $r \geq 5$ thì tích VT < 4 (vô lý). Do đó phải có $q = 3$ hoặc $r = 3$.

Nếu $q = 3$ thì $p = \frac{5r+15}{7r-15}$, $r \leq 3$ suy ra $r = 3, p = 5$. Bộ (5; 3; 3).

Nếu $r = 3$ thì $p = 1 + \frac{4}{q-2}$ suy ra $q = 3, p = 5$. Bộ (5; 3; 3).

Vậy các bộ số nguyên tố $(p; q; r)$ thỏa mãn là: (2;3;5), (7;5;2), và (5;3;3).

Câu 4. (3,0 điểm)

1) Cho tam giác ABC có trực tâm H , $BAC > 90^\circ$ và nội tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại S . Gọi M, I lần lượt là trung điểm các cạnh BC và AH .

a) Chứng minh rằng I là trực tâm tam giác SAM .

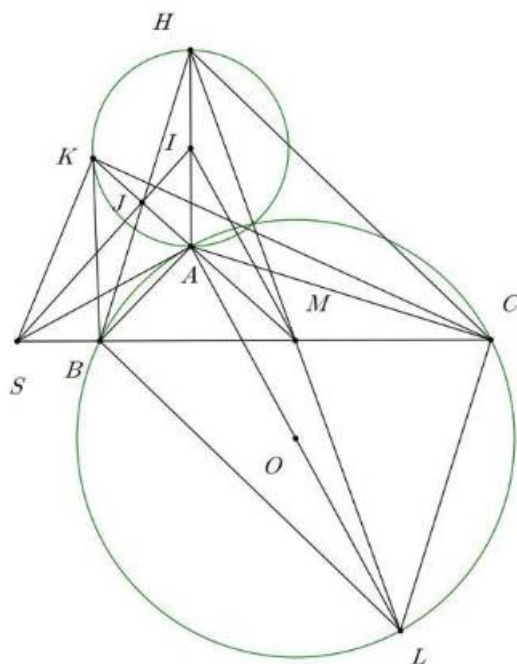
b) Gọi K là giao điểm thứ hai của đường thẳng AM với đường tròn đường kính AH . Chứng minh rằng SK tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BCK .

2) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, lấy một điểm P bất kỳ thuộc miền trong của tam giác. Chứng minh khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách từ điểm P đến các đỉnh A, B, C của tam giác không nhỏ hơn 2 lần khoảng cách bé nhất trong các khoảng cách từ điểm P đến các cạnh của tam giác ABC .

3) Một vật dụng đựng mỹ phẩm được thiết kế gồm hai phần, phần thân là hình trụ có một đáy dưới là hình tròn với bán kính $r = 6$ cm, chiều cao $h = 5$ cm và phần nắp là một nửa hình cầu bán kính $r = 6$ cm. Người ta cần sơn mặt ngoài (bao gồm cả đáy) của vật dụng đó, tính diện tích cần sơn.

Hướng dẫn giải

1)



a) Kẻ đường kính AL của (O) . Do $BL \parallel CH$, $CL \parallel BH$ nên $BHCL$ là hình bình hành.

Suy ra M là trung điểm HL . Vậy IM là đường trung bình của $\triangle HAL$ suy ra $IM \parallel AL$.

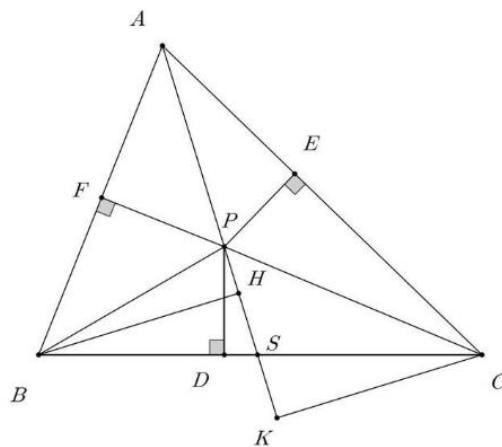
Mà AL vuông góc với tiếp tuyến AS suy ra $AS \perp IM$.

Ta cũng có $IA \perp SM$ (vì AH là đường cao). Suy ra I là trực tâm $\triangle ISM$.

b) Do A là trực tâm $\triangle ISM$ nên AM vuông góc với IS . Mà $IK = IA$ (bán kính) nên IS là trung trực của AK suy ra $SK = SA$ do đó $SK^2 = SA^2$.

Ta có $SA^2 = SB \cdot SC$ (tính chất tiếp tuyến). Từ đó $SK^2 = SB \cdot SC$ suy ra SK tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BCK .

2)



Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của P trên các cạnh BC, CA, AB .

Ta cần chứng minh $PA + PB + PC \geq 2(PD + PE + PF)$.

Gọi d_a, d_b, d_c lần lượt là PD, PE, PF .

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B, C lên đường thẳng AP .

Ta có $BH \leq BP, CK \leq CP$ suy ra $BH + CK \leq a$.

Do $2S_{APB} + 2S_{APC} = AP \cdot (BH + CK) \leq AP \cdot a$.

Mặt khác $2S_{APB} + 2S_{APC} = PF \cdot c + PE \cdot b = d_c \cdot c + d_b \cdot b$.

Suy ra $AP \geq d_b \frac{b}{a} + d_c \frac{c}{a}$.

Tương tự: $BP \geq d_c \frac{c}{b} + d_a \frac{a}{b}$ và $CP \geq d_a \frac{a}{c} + d_b \frac{b}{c}$.

Cộng vế theo vế: $PA + PB + PC \geq d_a \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + d_b \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + d_c \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right)$.

Áp dụng AM–GM cho các phân số, ta được $PA + PB + PC \geq 2(d_a + d_b + d_c)$.

3) Diện tích cần sơn gồm 3 phần:

– Diện tích xung quanh hình trụ: $S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 6 \cdot 5 = 60\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

– Diện tích mặt đáy dưới: $S_{day} = \pi r^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

– Diện tích mặt ngoài nửa hình cầu: $S_{cau} = \frac{1}{2} \cdot 4\pi r^2 = 2\pi \cdot 6^2 = 72\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

Tổng diện tích cần sơn là $S = 60\pi + 36\pi + 72\pi = 168\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

Câu 5. (1,5 điểm)

1) Có hai tấm bìa hình tròn I và II ngoài nhau gắn trên cùng một mặt phẳng. Tấm bìa I được chia thành 4 hình quạt như nhau ghi số lần lượt từ 1 đến 4. Tấm bìa II được chia thành 6 hình quạt như nhau ghi số lần lượt từ 1 đến 6. Trục quay của mỗi tấm bìa được gắn mũi tên cố định ở tâm. Người ta thiết kế để khi quay hai tấm bìa đến khi chúng dừng lại thì mũi tên gắn trên trục quay ở mỗi

tấm bìa chỉ thuộc ngẫu nhiên bên trong một hình quạt nào đó. Trong trò chơi “Vòng quay may mắn”, người chơi sẽ quay lần lượt hai tấm bìa. Khi hai bìa dừng lại, mũi tên của tấm bìa I ở hình quạt ghi số x , mũi tên của tấm bìa II ở hình quạt ghi số y . Người chơi sẽ nhận được quà nếu $x + y$ là một số nguyên tố. Tính xác suất để người chơi nhận được quà.

2) Cho 29 điểm trên mặt phẳng, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Người ta muốn tô màu tất cả các đoạn thẳng nối giữa chúng, sao cho mỗi đoạn thẳng được tô bởi đúng 1 màu và không có tam giác nào có hai cạnh cùng màu. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu màu để tô được như vậy?

3) Cho các số thực a, b, c thay đổi và thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 \geq 4 + 3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = a + b + c + \sqrt{2}(|a - b| + |b - c| + |c - a|)$.

Hướng dẫn giải

1) Số các kết quả có thể xảy ra khi quay hai tấm bìa là: $n(\Omega) = 4 \cdot 6 = 24$.

Gọi A là biến cố “Người chơi nhận được quà” ($x + y$ là số nguyên tố).

Tập hợp các kết quả thuận lợi là:

$$(x; y) \in \{(1; 1); (1; 2); (1; 4); (1; 6); (2; 1); (2; 3); (2; 5); (3; 2); (3; 4); (4; 1); (4; 3)\}.$$

Số kết quả thuận lợi là $n(A) = 11$.

Xác suất để người chơi nhận được quà là: $P(A) = \frac{11}{24}$.

2) Gọi k là số màu cần dùng. Các điểm là $A_1, A_2, \dots, A_{29}$.

Tại một đỉnh bất kỳ có 28 đoạn thẳng xuất phát, để không có tam giác nào có 2 cạnh cùng màu thì 28 đoạn thẳng này phải được tô bằng 28 màu đôi một khác nhau. Do đó $k \geq 28$.

Giả sử $k = 28$. Số lượng đoạn thẳng là $C_{29}^2 = 406$.

Theo Dirichlet, tồn tại 1 màu được tô cho ít nhất $\left\lceil \frac{406}{28} \right\rceil = 15$ đoạn thẳng.

Để 15 đoạn thẳng này không tạo thành tam giác có 2 cạnh cùng màu thì chúng không được chung đỉnh, nghĩa là cần ít nhất $15 \times 2 = 30$ điểm. Điều này vô lý vì chỉ có 29 điểm. Vậy $k \neq 28$.

Ta chứng minh $k = 29$ thỏa mãn: Đánh số các điểm từ A_0 đến A_{28} . Tô đoạn $A_i A_j$ bằng màu $k \equiv (i + j) \pmod{29}$. Cách tô này đảm bảo không có 2 đoạn cùng màu nào chung đỉnh.

Vậy cần ít nhất 29 màu.

3) Đặt $x = a - b \geq 0$, $y = b - c \geq 0$ ta có $x + y = a - c \geq 0$. (Giả sử $a \geq b \geq c$).

Từ giả thiết: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 4$ ta có $\frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] \geq 4$.

Suy ra $(a + b + c)[x^2 + y^2 + (x + y)^2] \geq 8$.

Vì $x^2 + y^2 + (x + y)^2 = 2(x^2 + xy + y^2) \leq 2(x + y)^2$.

Suy ra $2(a + b + c)(x + y)^2 \geq 8$ nên $a + b + c \geq \frac{4}{(x + y)^2}$.

Biểu thức T được viết lại: $T = (a + b + c) + \sqrt{2}[x + y + (x + y)] = (a + b + c) + 2\sqrt{2}(x + y)$.

$$T \geq \frac{4}{(x + y)^2} + \sqrt{2}(x + y) + \sqrt{2}(x + y).$$

Áp dụng BĐT AM–GM cho 3 số dương:

$$T \geq 3\sqrt[3]{\frac{4}{(x + y)^2} \cdot \sqrt{2}(x + y) \cdot \sqrt{2}(x + y)} = 3\sqrt[3]{8} = 6.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(x + y)^3 = \sqrt{2}$ và $a + b + c = \frac{4}{(x + y)^2} = 2$.

Giá trị nhỏ nhất của T bằng 6.

—————**HẾT**—————