

Câu I. (2,0 điểm)

1) Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên nhỏ hơn 125. Tính xác suất của biến cố A: “Số được chọn viết được dưới dạng tổng của hai số chính phương liên tiếp”.

2) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn đồng thời $a + b + c = 0$ và $a^2 + c^2 - 4bc - 2b + 2 = 0$.

Tính giá trị của biểu thức $M = abc$.

Câu II. (2,0 điểm)

1) Cho n là số nguyên dương thỏa mãn tồn tại các số nguyên dương a, b, c sao cho $n = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 1}{abc}$. Chứng minh n chia hết cho 4 nhưng không chia hết cho 8.

2) Tìm tất cả cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn $\frac{x^3 + 3}{x + 2} = \frac{4y^2}{2y + 1}$.

Câu III. (2,0 điểm)

1) Tìm tất cả cặp số nguyên dương $(n; p)$ thỏa mãn đồng thời p là số nguyên tố và $4n^2 + p^3 + 4p^2 - 8p - 32$ chia hết cho $np + 4n$.

2) Với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 2$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{bc + 2a + 1}{a^2 + 1} + \frac{ca + 2b + 1}{b^2 + 1} + \frac{ab + 2c + 1}{c^2 + 1}$.

Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC cân tại A , có đường cao AH . Lấy điểm O thuộc đoạn thẳng AH sao cho $OH > OA$. Đường thẳng AB cắt đường tròn tâm O bán kính OB tại điểm thứ hai T . Lấy điểm E thuộc đoạn thẳng AB sao cho $AE > AT$. Đường trung trực của đoạn thẳng CE cắt đường thẳng AH tại điểm N .

1) Chứng minh bốn điểm A, E, N, C cùng thuộc một đường tròn.

2) Đường thẳng qua điểm A và song song với đường thẳng BC cắt đường trung trực của đoạn thẳng CE tại điểm K . Gọi F là trung điểm của đoạn thẳng ET . Chứng minh $OFK = 90^\circ$.

3) Chứng minh đường tròn tâm O bán kính OB , đường tròn đường kính NK và đường thẳng TK cùng đi qua một điểm.

Câu V. (1,0 điểm) Xét số nguyên dương n và tập hợp S gồm n số nguyên dương $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n = 2000$.

ii) Với mọi số tự nhiên k , $2 \leq k \leq n$, tồn tại các số nguyên dương i, j nhỏ hơn k (không nhất thiết phân biệt) sao cho $a_k = a_i + 4a_j$.

1) Chứng minh tất cả các phần tử của tập hợp S đều là số chẵn.

2) Tìm giá trị lớn nhất của n .

—————**HẾT**—————

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đáp án và hướng dẫn giải

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

THPT NĂM HỌC 2026 – 2027

Môn thi: TOÁN (Chuyên Toán)

Ngày thi: 01/6/2026

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu I. (2,0 điểm)

1) Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên nhỏ hơn 125. Tính xác suất của biến cố A: “Số được chọn viết được dưới dạng tổng của hai số chính phương liên tiếp”.

2) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn đồng thời $a + b + c = 0$ và $a^2 + c^2 - 4bc - 2b + 2 = 0$.

Tính giá trị của biểu thức $M = abc$.

Hướng dẫn giải

1) Các số tự nhiên nhỏ hơn 125 gồm có 125 số là 0, 1, ..., 124 nên số phần tử không gian mẫu là $|\Omega| = 125$.

Giả sử số được chọn n có thể viết dưới dạng tổng hai số chính phương liên tiếp thì $n = k^2 + (k+1)^2$ với $k \in \mathbb{N}$.

Với $k \geq 8$ thì $n \geq 145 > 125$ không thể được chọn. Còn với $k \leq 7$ thì $0 \leq n < 125$ nên có 8 cách chọn n (tương ứng với 8 cách chọn k từ 0 đến 7).

Do vậy xác suất của biến cố A là $\frac{8}{125}$.

2) Ta có $c = -a - b$. Thay vào giả thiết thứ hai được:

$$a^2 + (a+b)^2 + 4b(a+b) - 2b + 2 = 0$$

tương đương $2a^2 + 6ab + 5b^2 - 2b + 2 = 0$

hay $(2a+3b)^2 + (b-2)^2 = 0$.

Ta có $(2a+3b)^2 \geq 0$ và $(b-2)^2 \geq 0$. Do đó $(2a+3b)^2 + (b-2)^2 \geq 0$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $2a+3b=0$ và $b-2=0$, hay $a=-3$, $b=2$.

Vậy $a=-3$, $b=2$, $c=-a-b=1$ nên $M=abc=-6$.

Câu II. (2,0 điểm)

1) Cho n là số nguyên dương thỏa mãn tồn tại các số nguyên dương a, b, c sao cho $n = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 1}{abc}$. Chứng minh n chia hết cho 4 nhưng không chia hết cho 8.

2) Tìm tất cả cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn $\frac{x^3 + 3}{x + 2} = \frac{4y^2}{2y + 1}$.

Hướng dẫn giải

1) Ta sẽ chứng minh cả 3 số a, b, c đều lẻ. Lưu ý ta có tính chất quen thuộc là nếu a chẵn thì $a^2 \equiv 0 \pmod{4}$, còn nếu a lẻ thì $a^2 \equiv 1 \pmod{4}$ và $a^2 \equiv 1 \pmod{8}$.

– Nếu cả 3 số a, b, c đều chẵn hoặc đúng 1 trong 3 số a, b, c chẵn thì $a^2 + b^2 + c^2 + 1$ lẻ, abc chẵn, suy ra abc không ước của $a^2 + b^2 + c^2 + 1$, vô lý.

– Nếu có 2 trong 3 số a, b, c là chẵn, ta có $a^2 + b^2 + c^2 + 1 \equiv 0 + 0 + 1 + 1 \equiv 2 \pmod{4}$, trong khi đó $4 \mid abc$, suy ra abc không là ước của $a^2 + b^2 + c^2 + 1$, vô lý.

Vậy cả 3 số a, b, c lẻ, suy ra abc lẻ và $a^2 + b^2 + c^2 + 1 \equiv 1 + 1 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod{4}$, từ đó suy ra $4 \mid n$. Lại có $a^2 + b^2 + c^2 + 1 \equiv 1 + 1 + 1 + 1 \equiv 4 \pmod{8}$, cho nên 8 không là ước của n .

2) Dễ thấy $y > 0$. Với $x \geq 6$, viết lại phương trình đã cho dưới dạng:

$$\frac{x^3 + 8 - 5}{x + 2} = \frac{4y^2 - 1 + 1}{2y + 1}$$

$$x^2 - 2x + 4 - \frac{5}{x + 2} = 2y - 1 + \frac{1}{2y + 1}$$

$$x^2 - 2x - 2y + 5 = \frac{5}{x + 2} + \frac{1}{2y + 1}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{5}{x + 2} + \frac{1}{2y + 1} \in \mathbb{Z}.$$

Lưu ý là do x, y là số tự nhiên và $y \geq 1$ nên:

$$0 < \frac{5}{x + 2} + \frac{1}{2y + 1} \leq \frac{5}{8} + \frac{1}{3} < 1$$

nên loại trường hợp này. Giờ xét $x \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Thử trực tiếp thì tìm được $x = y = 1$.

Vậy phương trình có duy nhất nghiệm (x, y) là $(1, 1)$.

Câu III. (2,0 điểm)

1) Tìm tất cả cặp số nguyên dương $(n; p)$ thỏa mãn đồng thời p là số nguyên tố và $4n^2 + p^3 + 4p^2 - 8p - 32$ chia hết cho $np + 4n$.

2) Với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 2$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{bc + 2a + 1}{a^2 + 1} + \frac{ca + 2b + 1}{b^2 + 1} + \frac{ab + 2c + 1}{c^2 + 1}$.

Hướng dẫn giải

1) Xét $p = 2$ thì $4n^2 + p^3 + 4p^2 - 8p - 32 = 4n^2 - 24$ và $np + 4n = 6n$.

Thế thì ta có $6n \mid 4n^2 - 24$, nói riêng thì $2n \mid 4n^2 - 24$.

Suy ra $2n \mid 24$. Từ đó $2n \in \{2; 4; 6; 8; 12; 24\}$ hay $n \in \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.

Thử trực tiếp thì không có giá trị n nào thỏa mãn $6n \mid 4n^2 - 24$.

Xét $p > 2$ thì p lẻ và theo giả thiết ta có:

$$4n^2 + p^3 + 4p^2 - 8p - 32 = kn(p + 4), \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$$

$$(2n)^2 = (p + 4)(kn - p^2 + 8).$$

Gọi $d = (p + 4, kn - p^2 + 8)$ thì $d^2 \mid (2n)^2$, kéo theo $d \mid 2n$.

Do $p + 4$ lẻ nên d lẻ. Từ đó $d \mid n$.

Suy ra $d \mid kn$. Lại có $kn - p^2 + 8 = kn - (p - 4)(p + 4) - 8$ nên $d \mid 8$. Do d lẻ nên $d = 1$.

Suy ra $(p + 4, kn - p^2 + 8) = 1$. Từ đó $p + 4, kn - p^2 + 8$ đều là các số chính phương.

Đặt $p + 4 = a^2, a \in \mathbb{N}^*$ thì $p = (a - 2)(a + 2)$. Do p là số nguyên tố nên $a - 2 = 1, a + 2 = p$.

Từ đó tìm được $a = 3, p = 5$. Thay vào giả thiết ta có $9n \mid 4n^2 + 153$. Suy ra $4n^2$ chia hết cho 3

hay n chia hết cho 3. Đặt $n = 3m, m \in \mathbb{N}^*$ thì $4n^2 + 153 = 9(4m^2 + 17)$ và $9n = 9 \cdot 3m$.

Thế thì ta phải có $n \mid 4m^2 + 17$, kéo theo $m \mid 17$ hay $m \in \{1; 17\}$. Suy ra $n \in \{3; 51\}$. Thử trực tiếp thì các giá trị này thỏa mãn đề bài.

Vậy (n, p) là $(3, 5)$ và $(51, 5)$.

2) Cách 1.

Tìm giá trị nhỏ nhất:

Ta có $bc + 2a + 1 = bc + a(a + b + c) + 1 = (a^2 + 1) + ab + bc + ca$.

Tương tự thì ta có:

$$P = 3 + (ab + bc + ca) \left(\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} \right) \geq 3.$$

Dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi $a = 2, b = c = 0$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 3.

Tìm giá trị lớn nhất:

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} &= 3 - \left(\frac{a^2}{a^2 + 1} + \frac{b^2}{b^2 + 1} + \frac{c^2}{c^2 + 1} \right) \\ &\leq 3 - \frac{(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + 3} = 3 - \frac{4}{7 - 2(ab + bc + ca)}. \end{aligned}$$

Do đó nếu đặt $t = ab + bc + ca$ thì $t \leq \frac{(a + b + c)^2}{3} = \frac{4}{3}$ và

$$P \leq t \left(3 - \frac{4}{7 - 2t} \right) = \frac{-(3t - 4)(26t - 63)}{13(7 - 2t)} + \frac{75}{13} \leq \frac{75}{13}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{2}{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{75}{13}$.

Cách 2. Ta biến đổi sau:

$$bc + 2a + 1 = bc + (a + b + c)a + 1 = ab + bc + ca + a^2 + 1$$

$$\text{Do đó } \frac{bc + 2a + 1}{a^2 + 1} = \frac{ab + bc + ca + a^2 + 1}{a^2 + 1} = \frac{ab + bc + ca}{a^2 + 1} + 1$$

Thực hiện tương tự, ta có thể viết lại biểu thức P dưới dạng:

$$P = (ab + bc + ca) \left(\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} \right) + 3.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất :

Vì a, b, c là các số thực không âm nên ta có $ab + bc + ca \geq 0$.

Đồng thời, hiển nhiên $\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} > 0$.

Suy ra:

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\right)\geq 0.$$

Do đó $P \geq 3$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $ab+bc+ca=0$. Kết hợp với điều kiện $a+b+c=2$ và $a,b,c \geq 0$, ta suy ra trong ba số a,b,c có hai số bằng 0 và một số bằng 2.

Vậy $\min P = 3$ khi $(a,b,c) = (0,0,2)$ và các hoán vị.

Tìm giá trị lớn nhất:

Từ biểu thức đã rút gọn, ta có:

$$P-3 = (ab+bc+ca)\left(\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\right)$$

Vì $a,b,c \geq 0$ và $a+b+c=2$ nên $a+b \leq 2$. Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \leq \frac{2^2}{4} = 1$$

Với $ab \leq 1$, ta có bất đẳng thức phụ quen thuộc sau:

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} \leq \frac{2}{ab+1}$$

(Thật vậy, quy đồng và rút gọn ta được bất đẳng thức tương đương là $(a-b)^2(1-ab) \geq 0$, điều này luôn đúng do $ab \leq 1$).

Trong ba số $a-\frac{2}{3}, b-\frac{2}{3}, c-\frac{2}{3}$, theo nguyên lý Dirichlet luôn tồn tại hai số cùng dấu.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử hai số đó là $a-\frac{2}{3}$ và $b-\frac{2}{3}$. Khi đó:

$$\left(a-\frac{2}{3}\right)\left(b-\frac{2}{3}\right) \geq 0 \text{ suy ra } ab \geq \frac{2}{3}(a+b) - \frac{4}{9} = \frac{2}{3}(2-c) - \frac{4}{9} = \frac{8-6c}{9}$$

Từ đây suy ra: $\frac{2}{ab+1} \leq \frac{2}{\frac{8-6c}{9}+1} = \frac{18}{17-6c}$

Mặt khác, ta cũng có đánh giá:

$$ab+bc+ca = ab+c(a+b) \leq \frac{(a+b)^2}{4} + c(a+b) = \frac{(2-c)^2}{4} + c(2-c) = \frac{4+4c-3c^2}{4}$$

Thay các đánh giá trên vào biểu thức của $P-3$, ta được:

$$P-3 \leq \left(\frac{4+4c-3c^2}{4} \right) \left(\frac{18}{17-6c} + \frac{1}{c^2+1} \right)$$

Ta sẽ chứng minh:

$$\left(\frac{4+4c-3c^2}{4} \right) \left(\frac{18}{17-6c} + \frac{1}{c^2+1} \right) \leq \frac{36}{13}$$

Biến đổi bất đẳng thức trên (chú ý $c \in [0, 2]$ nên $17-6c > 0$), ta có:

$$13(4+4c-3c^2)[18(c^2+1)+17-6c] \leq 144(17-6c)(c^2+1)$$

$$13(4+4c-3c^2)(18c^2-6c+35) \leq 144(17-6c)(c^2+1)$$

$$702c^4 - 2034c^3 + 3189c^2 - 2372c + 628 \geq 0$$

$$(3c-2)^2(78c^2-122c+157) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng vì $(3c-2)^2 \geq 0$ và tam thức bậc hai $78c^2-122c+157 > 0$ với mọi c (do $\Delta' = (-61)^2 - 78 \cdot 157 = -8525 < 0$).

Từ đó, ta có: $P-3 \leq \frac{36}{13}$ suy ra: $P \leq \frac{75}{13}$

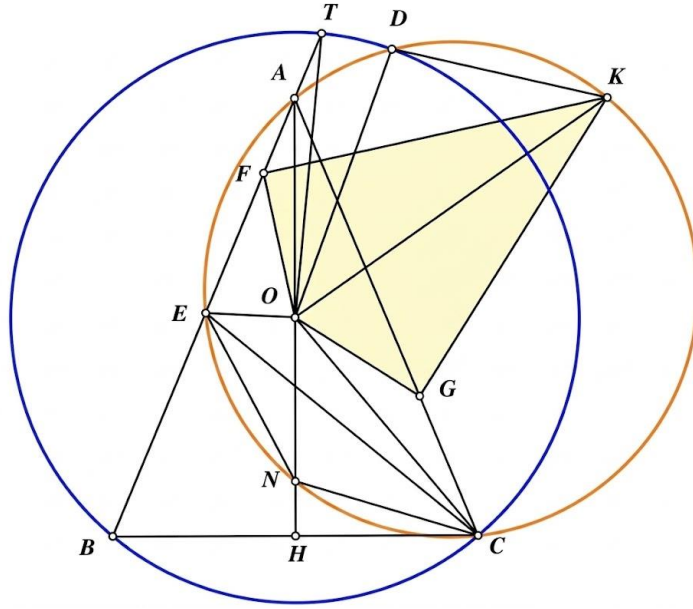
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{2}{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{75}{13}$.

Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC cân tại A , có đường cao AH . Lấy điểm O thuộc đoạn thẳng AH sao cho $OH > OA$. Đường thẳng AB cắt đường tròn tâm O bán kính OB tại điểm thứ hai T . Lấy điểm E thuộc đoạn thẳng AB sao cho $AE > AT$. Đường trung trực của đoạn thẳng CE cắt đường thẳng AH tại điểm N .

- 1) Chứng minh bốn điểm A, E, N, C cùng thuộc một đường tròn.
- 2) Đường thẳng qua điểm A và song song với đường thẳng BC cắt đường trung trực của đoạn thẳng CE tại điểm K . Gọi F là trung điểm của đoạn thẳng ET . Chứng minh $OFK = 90^\circ$.
- 3) Chứng minh đường tròn tâm O bán kính OB , đường tròn đường kính NK và đường thẳng TK cùng đi qua một điểm.

Hướng dẫn giải



1) Nhận thấy nếu lấy N' là giao điểm thứ hai của AH với đường tròn (AEC) thì N' là điểm chính giữa cung EC do AH là phân giác BAC hay N' thuộc đường trung trực của EC . Từ đó suy ra $N' \equiv N$.

2) Lập luận tương tự phần 1) ta cũng có K là điểm chính giữa cung lớn EC của đường tròn (AEC) .

Trên tia CA lấy G sao cho $CG = EF = FT$. Khi đó $\Delta KCG = \Delta KEF$ và $\Delta OGC = \Delta OFT$ (c.g.c).

Từ đó suy ra $KG = KF$ và $OG = OF$ nên $\Delta OGK = \Delta OFK$ (c.c.c), kéo theo $OGK = OFK$.

Kết hợp $OGK = 360^\circ - (KGC + OGC) = 360^\circ - (KFE + OFT) = 180^\circ - OFK$.

Cho nên $OGK = OFK = 90^\circ$.

3) Lấy D là giao điểm thứ hai của KT với đường tròn đường kính NK , tức đường tròn (AEC) .

Khi này:

$$KDC = KNC = \frac{1}{2}ENC = 90^\circ - \frac{BAC}{2} = ABC = TBC.$$

Bởi vậy mà tứ giác $DTBC$ nội tiếp hay D cũng thuộc (BTC) hay chính là đường tròn tâm O , bán kính OB . Như vậy 3 đường cùng đi qua điểm D .

Câu V. (1,0 điểm) Xét số nguyên dương n và tập hợp S gồm n số nguyên dương $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n = 2000$.

ii) Với mọi số tự nhiên k , $2 \leq k \leq n$, tồn tại các số nguyên dương i, j nhỏ hơn k (không nhất thiết phân biệt) sao cho $a_k = a_i + 4a_j$.

1) Chứng minh tất cả các phần tử của tập hợp S đều là số chẵn.

2) Tìm giá trị lớn nhất của n .

Hướng dẫn giải

1) Ta sẽ chứng minh mệnh đề tổng quát hơn là mọi số $a_i \equiv a_1 \pmod{4}$ với mọi i .

Giả sử phản chứng điều này không đúng, ta sẽ chọn được chỉ số i nhỏ nhất để $a_i \not\equiv a_1 \pmod{4}$.

Nếu $i = 1$ thì ta sẽ quy nạp $a_j \equiv a_1 \pmod{4}$ với mọi j .

Thật vậy giả sử $a_t \equiv a_1 \pmod{4}$ với mọi $t \leq j$, ta chứng minh $a_{j+1} \equiv a_1$ lẻ. Theo giả thiết đề bài, tồn tại $k, l \leq j$ để $a_{j+1} = a_k + 4a_l$, theo giả thiết quy nạp, $a_{j+1} \equiv a_k \equiv a_1 \pmod{4}$.

Do đó theo nguyên lý quy nạp $a_j \equiv a_1 \pmod{4}$ với mọi j , tuy nhiên $a_n \not\equiv a_1 \pmod{4}$ theo cách chọn, điều này suy ra mâu thuẫn.

Nếu $i > 1$ thì theo đề bài tồn tại $j, k < i$ để $a_i = a_j + 4a_k$, tuy nhiên khi này $a_j \equiv a_k \equiv a_1 \pmod{4}$.

Điều này mâu thuẫn cách chọn i là chỉ số nhỏ nhất.

2) Áp dụng câu 1, ta có a_i chia hết cho 4 với mọi i , do đó ta có thể đặt $a_i = 4b_i$, khi đó $b_n = 500$.

Ta lập luận tương tự ta có $b_i \equiv 2 \pmod{4}$ với mọi i , ta đặt $b_i = 4c_i$ khi đó $c_n = 125$.

Áp dụng câu 1, ta cũng có $c_i \equiv 1 \pmod{4}$ với mọi i , do đó $n \leq 1 + \frac{125-1}{4} = 32$, dấu bằng có xảy

ra khi $c_i = 4i - 3$ bởi $c_i = 4c_1 + c_{i-1}$.

Do đó $n \leq 32$ và dấu bằng xảy ra khi $a_i = 16(4i - 3)$.

————HẾT————