

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN (Chuyên Tin)

Ngày thi: 01/6/2026

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu I (2,0 điểm)

1) Một hộp chứa 4 viên bi có cùng kích thước và khối lượng như nhau gồm: bi màu xanh, bi màu đỏ, bi màu tím và bi màu vàng. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi trong hộp. Tính xác suất của biến cố A : “Lấy được 2 viên bi trong đó có viên bi màu xanh”.

2) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $2a^2 + 2b^2 + c^2 - 2ac - 2bc = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a}{2a+1} + \frac{b}{2b+1} + \frac{1}{c+1}$.

Câu II (2,0 điểm)

1) Với a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $a^3 - b^3$ là số nguyên tố. Chứng minh $a^3 - b^3 + 2027$ chia hết cho 6.

2) Tìm tất cả cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $3^x - 1 = 2.13^y$.

Câu III (2,0 điểm)

1) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $ab = 6c^2$ và $\frac{a^3 + b^3 + 27c^3}{2}$ là số nguyên tố.

2) Với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{a^2}{bc + 2a + 3} + \frac{b^2}{ca + 2b + 3} + \frac{c^2}{ab + 2c + 3}$.

Câu IV (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Đường thẳng MO cắt đường tròn (O) tại hai điểm E, F ($ME < MF$). Kẻ đường thẳng qua E vuông góc với đường thẳng AC tại điểm D . Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và S là trung điểm của đoạn thẳng HE .

1) Chứng minh tam giác BAF đồng dạng với tam giác MDC .

2) Đường thẳng AH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai Q . Đường thẳng QF cắt đường thẳng BC tại điểm T . Chứng minh điểm S thuộc đường thẳng MD và $\widehat{TSO} = 90^\circ$.

3) Đường thẳng qua S vuông góc với đường thẳng BS cắt đường thẳng AC tại điểm P . Chứng minh $PA = PF$.

Câu V (1,0 điểm)

Với mỗi số nguyên dương n ($n \leq 99$), xét 100 số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

i) $1 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{100}$.

ii) Với mọi $1 \leq j < i \leq 100$ thì $a_i - a_j \neq n$.

1) Khi $n = 2$, chứng minh $a_3 - a_1 \geq 4$.

2) Tìm tất cả giá trị của n để a_{100} nhỏ nhất.

----- HẾT -----

**LỜI GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
HÀ NỘI
NĂM HỌC 2026 – 2027**



Môn Toán

Môn thi: Toán chuyên (vòng 2)

Nguyễn Nhất Huy - Lê Nam Khánh - Phạm Ngọc Uy

**Trần Nguyễn Đức Nhật - Lê Thanh Lâm - Hoàng Lê
Nhật Tùng**

**Phan Anh Quân - Trịnh Huy Vũ - Nguyễn Đăng
Khoa - Nguyễn Đức Quán**

1. PHẦN ĐỀ THI

Câu 1.

- Một hộp chứa 4 viên bi có cùng kích thước và khối lượng như nhau gồm: bi màu xanh, bi màu đỏ, bi màu tím và bi màu vàng. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi trong hộp. Tính xác suất của biến cố A: "Lấy được 2 viên bi trong đó có viên bi màu xanh".
- Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $2a^2 + 2b^2 + c^2 - 2ac - 2bc = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a}{2a+1} + \frac{b}{2b+1} + \frac{1}{c+1}$.

Câu 2.

- Với a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $a^3 - b^3$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng $a^3 - b^3 + 2027$ chia hết cho 6.
- Tìm tất cả cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $3^x - 1 = 2 \cdot 13^y$.

Câu 3.

- Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $ab = 6c^2$ và $\frac{a^3 + b^3 + 27c^3}{2}$ là số nguyên tố.
- Với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{a^2}{bc + 2a + 3} + \frac{b^2}{ca + 2b + 3} + \frac{c^2}{ab + 2c + 3}$.

Câu 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Đường thẳng MO cắt đường tròn (O) tại hai điểm E, F ($ME < MF$). Kẻ đường thẳng qua E vuông góc với đường thẳng AC tại điểm D . Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và S là trung điểm của đoạn thẳng HE .

- Chứng minh rằng tam giác BAF đồng dạng với tam giác MDC .

- 2) Đường thẳng AH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai Q . Đường thẳng QF cắt đường thẳng BC tại điểm T . Chứng minh rằng điểm S thuộc đường thẳng MD và $\widehat{TSO} = 90^\circ$.
- 3) Đường thẳng qua S vuông góc với đường thẳng BS cắt đường thẳng AC tại điểm P . Chứng minh rằng $PA = PF$.

Câu 5. Với mỗi số nguyên dương n ($n \leq 99$), xét 100 số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

- i) $1 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{100}$.
 - ii) Với mọi $1 \leq j < i \leq 100$ thì $a_i - a_j \neq n$.
- 1) Khi $n = 2$, chứng minh rằng $a_3 - a_1 \geq 4$.
 - 2) Tìm tất cả giá trị của n để a_{100} nhỏ nhất.



Tích Kiến Thức - Trữ Niềm Vui

2. PHẦN ĐÁP ÁN

Câu 1

- Một hộp chứa 4 viên bi có cùng kích thước và khối lượng như nhau gồm: bi màu xanh, bi màu đỏ, bi màu tím và bi màu vàng. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi trong hộp. Tính xác suất của biến cố A: "Lấy được 2 viên bi trong đó có viên bi màu xanh".
- Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $2a^2 + 2b^2 + c^2 - 2ac - 2bc = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a}{2a+1} + \frac{b}{2b+1} + \frac{1}{c+1}$.

Lời giải.

- Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi trong 4 viên bi, số phần tử của không gian mẫu là 6.

Liệt kê các kết quả thuận lợi cho biến cố A: "có viên bi màu xanh".

Các cặp gồm viên bi màu xanh và một viên bi khác là

$$\{\text{xanh, đỏ}\}, \{\text{xanh, tím}\}, \{\text{xanh, vàng}\}.$$

Có 3 kết quả thuận lợi.

Vậy xác suất của biến cố A là:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

- Lời giải.

Vì $2a^2 + 2b^2 + c^2 - 2ac - 2bc = 0$ nên $4a^2 + 4b^2 + 2c^2 - 4ac - 4bc = 0$, từ đây biến đổi thành $(2a - c)^2 + (2b - c)^2 = 0$. Dẫn đến $2a = 2b = c$.

$$\text{Khi đó } P = \frac{a}{c+1} + \frac{b}{c+1} + \frac{1}{c+1} = \frac{a+b+1}{c+1} = \frac{\frac{c}{2} + \frac{c}{2} + 1}{c} = 1.$$

Vậy $P = 1$.

□

Câu 2

- Với a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $a^3 - b^3$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng $a^3 - b^3 + 2027$ chia hết cho 6.
- Tìm tất cả cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $3^x - 1 = 2 \cdot 13^y$.

Lời giải.

- Ta có $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. Vì $a, b \in \mathbb{Z}^+$ nên $a, b \geq 1$, do đó $a^2 + ab + b^2 \geq 3$, $a - b = 1$ hay $a = b + 1$.

Khi đó $a^3 - b^3 + 2027 = 3b^2 + 3b + 2028 = 3b(b + 1) + 2028$ chia hết cho 2 và 3. Mà $(2, 3) = 1$ nên $a^3 - b^3 + 2027$ chia hết cho 6.

- 2) Từ đề bài suy ra $3^x \equiv 1 \pmod{13}$ nên x chia hết cho 3, đặt $x = 3k$ ($k \in \mathbb{Z}^+$). Khi đó bài toán trở thành

$$3^{3k} - 1 = (3^k - 1)(3^{2k} + 3^k + 1) = 2 \cdot 13^y.$$

Đặt $(3^k - 1, 3^{2k} + 3^k + 1) = d$ thì $3^k - 1 : d$ và $3^{2k} + 3^k + 1 : d$ mà $3^k - 1$ không chia hết cho 3 nên $d = 1$. Lại có $3^{2k} + 3^k + 1$ là số lẻ nên $3^k - 1 = 2$, suy ra $k = 1$, khi đó $x = 3; y = 1$.

Thử lại $x = 3; y = 1$ thoả mãn. Vậy $(x; y) = (3; 1)$.

□

Câu 3

- 1) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c thoả mãn $ab = 6c^2$ và $\frac{a^3 + b^3 + 27c^3}{2}$ là số nguyên tố.
- 2) Với a, b, c là các số thực không âm thoả mãn $a + b + c = 3$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{a^2}{bc + 2a + 3} + \frac{b^2}{ca + 2b + 3} + \frac{c^2}{ab + 2c + 3}$.

Lời giải.

- 1) Ta có $ab = 6c^2$ nên $9abc = 54c^3$ do đó

$$\frac{a^3 + b^3 + 27c^3}{2} = \frac{a^3 + b^3 - 27c^3 + 9abc}{2} = \frac{(a + b - 3c)(a^2 + b^2 + 9c^2 - ab + 3ac + 3bc)}{2},$$

đến đây xét với số nguyên tố p thì

$$(a + b - 3c)(a^2 + b^2 + 9c^2 - ab + 3ac + 3bc) = 2p,$$

lại có $a^2 + b^2 - ab + 9c^2 + 3ac + 3cb = (a - b)^2 + ab + 9c^2 + 3ac + 3cb$ mà $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ nên $(a - b)^2 + ab + 9c^2 + 3ac + 3cb \geq 16$, từ đó ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1. $a + b - 3c = 1$ thì $a + b = 3c + 1$ và $ab = 6c^2$, khi đó a, b là nghiệm của phương trình ẩn t

$$t^2 - (3c + 1)t + 6c^2 = 0,$$

Ta có $\Delta_t = (3c + 1)^2 - 24c^2 < 0$ khi $c \geq 1$ nên phương trình này vô nghiệm.

Trường hợp 2. $a + b - 3c = 2$ thì $a + b = 3c + 2$ và $ab = 6c^2$, khi đó a, b là nghiệm của phương trình ẩn t

$$t^2 - (3c + 2)t + 6c^2 = 0,$$

Ta có $\Delta_t = (3c + 2)^2 - 24c^2 \geq 0$ khi $-1 < c < 2$ mà $c \in \mathbb{Z}^+$ nên $c = 1$, suy ra $a = 2, b = 3$ hoặc $a = 3, b = 2$.

Thử lại $(a; b; c) = (2; 3; 1), (3; 2; 1)$ đều thoả mãn. Vậy $(a; b; c) = (2; 3; 1), (3; 2; 1)$.

- 2) Theo bất đẳng thức cơ bản $ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a + b + c)^2$ ta suy ra $ab + bc + ca \leq 3$. Hơn nữa, áp dụng bất đẳng thức cộng mẫu số ta có

$$T \geq \frac{(a + b + c)^2}{ab + bc + ca + 2(a + b + c) + 9} \geq \frac{9}{3 + 6 + 9} = \frac{1}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. Giá trị nhỏ nhất của T là $\frac{1}{2}$.

Mặt khác rõ ràng

$$T \leq \sum \frac{a^2}{2a+3}.$$

Hơn nữa dễ dàng chứng minh $\frac{a^2}{2a+3} \leq \frac{1}{3}a$ với mọi $0 \leq a \leq 3$ vì bất đẳng thức này tương đương với bất đẳng thức luôn đúng $a(a-3) \leq 0$.

Do đó,

$$T \leq \frac{1}{3}(a+b+c) = 1.$$

Dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi $a = 3, b = c = 0$. Giá trị lớn nhất của T là 1, □

Câu 4

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Đường thẳng MO cắt đường tròn (O) tại hai điểm E, F ($ME < MF$). Kẻ đường thẳng qua E vuông góc với đường thẳng AC tại điểm D . Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và S là trung điểm của đoạn thẳng HE .

- 1) Chứng minh rằng tam giác BAF đồng dạng với tam giác MDC .
- 2) Đường thẳng AH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai Q . Đường thẳng QF cắt đường thẳng BC tại điểm T . Chứng minh rằng điểm S thuộc đường thẳng MD và $\widehat{TSO} = 90^\circ$.
- 3) Đường thẳng qua S vuông góc với đường thẳng BS cắt đường thẳng AC tại điểm P . Chứng minh rằng $PA = PF$.

Lời giải.

- 1) Vì $\widehat{EMC} = \widehat{EDC} = 90^\circ$ nên tứ giác $EMDC$ là tứ giác nội tiếp, dẫn đến $\widehat{MDC} + \widehat{MEC} = 180^\circ$. Trong khi đó, vì E, F lần lượt là trung điểm của cung nhỏ và cung lớn BC nên ta được $\widehat{FEC} = \widehat{FEB}$. Kết hợp với việc tứ giác $ABEF$ là tứ giác nội tiếp thì ta thu được

$$\widehat{MDC} = 180^\circ - \widehat{MEC} = 180^\circ - \widehat{BEF} = \widehat{BAF}.$$

Kết hợp với $\widehat{MCD} = \widehat{ACB} = \widehat{AFB}$, ta suy ra $\triangle BAF \sim \triangle MDC$ (g.g).

- 2) Vì tứ giác $EMDC$ nội tiếp nên ta được $\widehat{ADM} = \widehat{MEC} = \widehat{FEC} = \widehat{FAC}$. Từ đó suy ra $MD \parallel AF$.

Dựng đường kính AJ của (O) . Khi đó để ý rằng $BHJC$ là hình bình hành nên trung điểm M của BC cũng là trung điểm của HJ . Do đó MS là đường trung bình của tam giác HEJ , vì thế $MS \parallel EJ$. Lại có AJ, EF là các đường kính của (O) , do đó $AEJF$ là hình chữ nhật, kéo theo $EJ \parallel AF$. Như vậy ta thu được $MS \parallel AF$.

Vì MS và MD cùng song song với AF nên ta thu được S, M, D thẳng hàng.

Gọi G là giao điểm của AH với BC . Để ý rằng ta có G là trung điểm của HQ (kết quả quen thuộc) nên GS là đường trung bình của $\triangle HQE$, dẫn đến $GS \parallel QE$. Kết hợp với $\widehat{EQF} = 90^\circ$ (do EF là đường kính của (O)), ta thu được

$$\widehat{TGS} = 90^\circ - \widehat{GTQ} = \widehat{AQF} = \widehat{QFO} = \widehat{FQO} = \widehat{TQO}.$$

Mặt khác, chú ý rằng $\triangle GTQ \sim \triangle QEF$ (g.g) nên ta thu được

$$\frac{TG}{TQ} = \frac{EQ}{EF} = \frac{2GS}{2QO} = \frac{GS}{QO}.$$

Do vậy ta được $\triangle TGS \sim \triangle TQO$ (c.g.c), dẫn đến $\widehat{GTQ} = \widehat{GTS} - \widehat{QTS} = \widehat{QTO} - \widehat{QTS} = \widehat{STO}$ và $\frac{TG}{TS} = \frac{TQ}{TO}$. Từ đó suy ra $\triangle TGQ \sim \triangle TSO$ (c.g.c), kéo theo $\widehat{TSO} = \widehat{TGQ} = 90^\circ$.

- 3) Đường thẳng BH lần lượt cắt AC và (O) tại các điểm I và K . Vì $\widehat{BIP} = \widehat{BSP} = 90^\circ$ nên tứ giác $BIPS$ là tứ giác nội tiếp. Mặt khác, chú ý rằng I là trung điểm của HK (kết quả quen thuộc), SI là đường trung bình của $\triangle HKE$, dẫn đến $SI \parallel EK$. Vì thế ta thu được

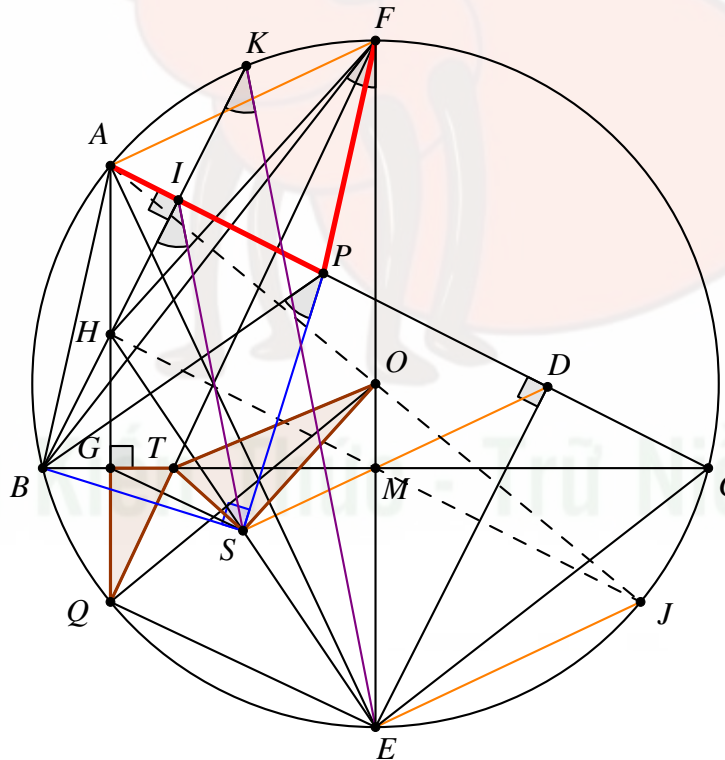
$$\widehat{BPS} = \widehat{BIS} = \widehat{BKE} = \widehat{BFE}.$$

Kết hợp với $\widehat{BSP} = \widehat{BMP} = 90^\circ$ suy ra $\triangle BSP \sim \triangle BMF$ (g.g). Từ đó thu được $\widehat{SBM} = \widehat{SBP} - \widehat{MBP} = \widehat{MBF} - \widehat{MBP} = \widehat{PBF}$ và $\frac{BS}{BP} = \frac{BM}{BF}$. Do vậy $\triangle BSM \sim \triangle BPF$ (c.g.c), cho ta $\widehat{PFB} = \widehat{SMB}$. Lại để ý rằng $S \in MD$. Từ đó ta có biến đổi góc

$$\widehat{PFA} = \widehat{AFB} + \widehat{BFP} = \widehat{DCM} + \widehat{BMS} = \widehat{DEM} + \widehat{DMC} = \widehat{DEM} + \widehat{DEC} = \widehat{MEC} = \widehat{FAC}.$$

Do vậy $\triangle PAF$ cân tại P , hay nói cách khác ta được $PA = PF$.

□



Câu 5

Với mỗi số nguyên dương n ($n \leq 99$), xét 100 số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

- i) $1 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{100}$.
 - ii) Với mọi $1 \leq j < i \leq 100$ thì $a_i - a_j \neq n$.
- 1) Khi $n = 2$, chứng minh rằng $a_3 - a_1 \geq 4$.
 - 2) Tìm tất cả giá trị của n để a_{100} nhỏ nhất.

Lời giải.

- 1) Ta sẽ chứng minh mệnh đề tổng quát sau với k, n bất kỳ

$$a_{k+n} - a_k \geq 2n \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+.$$

Thật vậy, giả sử $a_{k+n} - a_n \leq 2n - 1$. Đặt $b_i = a_{k+i} - a_{k+i-1}$, với $1 \leq i \leq n$. Ta có $b_1 + \dots + b_n \leq 2n - 1$. Xét các tổng $b_1, b_1 + b_2, \dots, b_1 + b_2 + \dots + b_n$.

Nếu tồn tại i sao cho $b_1 + \dots + b_i$ chia hết cho n , mà $0 < b_1 + \dots + b_i < 2n$, cho nên $b_1 + \dots + b_i = n$. Khi đó $a_{k+i} - a_k = b_1 + \dots + b_i = n$, vô lý.

Còn nếu các tổng trên đều không chia hết cho n , thì n tổng trên khi chia cho n sẽ nhận $n - 1$ số dư $1, 2, \dots, n - 1$. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại 2 tổng có cùng số dư khi chia cho n , giả sử đó là $b_1 + \dots + b_i$ và $b_1 + \dots + b_j$ với $1 \leq i < j$. Khi đó $b_{i+1} + \dots + b_j = (b_1 + \dots + b_j) - (b_1 + \dots + b_i)$ phải chia hết cho n , mà $0 < b_{i+1} + \dots + b_j < 2n$, cho nên $b_{i+1} + \dots + b_j = n$. Khi đó $a_j - a_i = b_{i+1} + \dots + b_j = n$, vô lý.

Vậy giả sử trên là sai, ta đã chứng minh xong mệnh đề. Cho $k = 1, n = 2$ ta có khẳng định cần chứng minh.

- 2) Áp dụng mệnh đề trên, đặt $100 = pn + r$ với $0 \leq r < n$ và $p \geq 1$ (do $n < 100$).

- Nếu $r = 0$, ta có $a_n \leq a_{2n} - 2n \leq a_{3n} - 4n \leq \dots \leq a_{pn} - (p-1)2n = a_{100} - (p-1)2n$, hay

$$\begin{aligned}
 a_{100} &\geq a_n + 2(p-1)n \\
 &= a_n + 2pn - 2n \\
 &= 200 + a_n - 2n \\
 &\geq 200 + a_1 + (n-1) - 2n \quad (\text{Do } a_n - a_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \geq \sum_{k=1}^{n-1} 1 = n-1) \\
 &= 200 + a_1 - n - 1 \\
 &\geq 200 + 2 - 50 - 1 \quad (\text{Do } n \mid 100 \text{ và } n < 100 \text{ nên } n \leq 50) \\
 &= 151.
 \end{aligned}$$

Dấu bằng có thể xảy ra tại dãy $(a_1, a_2, \dots, a_{100}) = (2, 3, \dots, 51, 102, 103, \dots, 151)$.

- Nếu $r \neq 0$, tương tự ta có $a_r \leq a_{r+n} - 2n \leq \dots \leq a_{r+pn} - 2pn = a_{100} - 2pn$, hay

$$\begin{aligned} a_{100} &\geq a_r + 2pn \\ &= a_r + 200 - 2r \\ &\geq a_1 + (r-1) + 200 - 2r \\ &= 200 + a_1 - r - 1 \end{aligned}$$

Mà $100 = pn + r \geq n + r \geq 2r + 1$, từ đó suy ra $r \leq 49$. Từ đó $a_{100} \geq 200 + 2 - 49 - 1 = 152 > 151$.

Tóm lại, giá trị nhỏ nhất của a_{100} bằng 151, xảy ra tại $n = 50$.

□



Tích Kiến Thức - Trữ Niềm Vui