

Câu 1 (5,0 điểm)

- a) Tìm tất cả các cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn $x + y = x^2 + y^2 = x^4 + y^4$.
- b) Giải phương trình $2(x^2 - x + 1)^2 + 3x^2 = 2(x^2 + x + 1)^2 + 3(x^2 + 1)^2$.

Câu 2 (3,0 điểm)

- a) Cho đa thức $P(x) = x^{2027} + ax^5 + bx$. Tìm tất cả các số nguyên a, b để $P(x)$ chia hết cho 2027 với mọi số nguyên x .
- b) Tìm tất cả các số nguyên tố p để $1 + 2^p + 3^p$ là số chính phương.

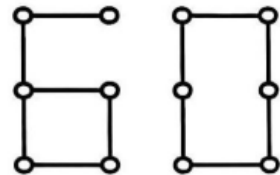
Câu 3 (2,0 điểm). Xét 3 số nguyên a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$.

Câu 4 (7,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H . Điểm M di động trên cạnh BC (M khác B và C). Đường tròn ngoại tiếp tam giác CME cắt AM tại điểm thứ hai là N .

- a) Chứng minh rằng $AM \cdot AN = AB \cdot AF$.
- b) Chứng minh rằng HN vuông góc với AM .
- c) Kẻ MI, MJ lần lượt là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMF, CME . Đường thẳng đi qua A và vuông góc với MH cắt IJ tại S . Chứng minh rằng S luôn thuộc một đường thẳng cố định khi M di động trên cạnh BC .

Câu 5 (3,0 điểm). Nhân dịp kỷ niệm 60 năm ngày thành lập trường, các bạn học sinh lớp 10 chuyên Toán - Tin cùng nhau làm một logo trang trí. Logo là mô hình số 60 được gắn đèn led tại 12 vị trí ô tròn cùng dây nối như hình bên.



- a) Trên mô hình số 6, ở mỗi vị trí ô tròn được lắp một bóng đèn có màu được chọn ngẫu nhiên là một trong ba màu xanh, đỏ hoặc vàng. Tính xác suất để không có hai bóng đèn kề nhau cùng màu (hai bóng đèn kề nhau là 2 bóng đã được nối với nhau bởi một đoạn dây không đi qua bóng đèn khác).
- b) Sau khi đã gắn xong 12 bóng đèn led gồm 3 bóng màu xanh, 4 bóng màu đỏ và 5 bóng màu vàng vào 12 vị trí ô tròn trên mô hình số 60, các bạn học sinh cài đặt chương trình đổi màu cho các bóng đèn. Chương trình đổi màu là mỗi lần chọn 2 bóng khác màu rồi cùng được đổi sang màu còn lại. Hỏi có lúc nào đó cả 12 bóng đèn cùng một màu hay không?

----- HẾT -----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu.
- CBCT không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Dành cho các thí sinh thi vào chuyên Toán, chuyên Tin

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. (5,0 điểm)

a) Tìm tất cả các cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn $x + y = x^2 + y^2 = x^4 + y^4$

b) Giải phương trình $2(x^2 - x + 1)^2 + 3x^2 = 2(x^2 + x + 1)^2 + 3(x^2 + 1)^2$.

Câu 2. (3,0 điểm)

a) Cho đa thức $P(x) = x^{2027} + ax^5 + bx$. Tìm tất cả các số nguyên a, b để $P(x)$ chia hết cho 2027 với mọi số nguyên x .

b) Tìm tất cả các số nguyên tố p để $1 + 2^p + 3^p$ là số chính phương.

Câu 3. (2,0 điểm) Xét 3 số nguyên a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$.

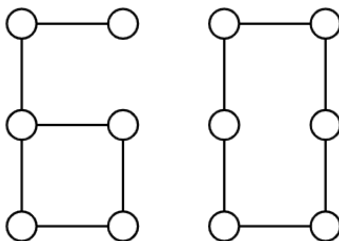
Câu 4. (7,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H . Điểm M di động trên cạnh BC (M khác B và C). Đường tròn ngoại tiếp tam giác CME cắt AM tại điểm thứ hai là N .

a) Chứng minh rằng $AM \cdot AN = AB \cdot AF$.

b) Chứng minh rằng HN vuông góc với AM .

c) MI, MJ lần lượt là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMF, CME . Đường thẳng đi qua A và vuông góc với MH cắt IJ tại S . Chứng minh rằng S luôn thuộc một đường thẳng cố định khi M di động trên cạnh BC .

Câu 5. (3,0 điểm) Nhân dịp kỷ niệm 60 năm ngày thành lập trường, các bạn học sinh lớp 10 chuyên Toán – Tin cùng nhau làm một logo trang trí. Logo là mô hình số 60 được gắn đèn led tại 12 vị trí ô tròn cùng dây nối như hình bên.



a) Trên mô hình số 6, ở mỗi vị trí ô tròn được lắp một bóng đèn có màu được chọn ngẫu nhiên là một trong ba màu xanh, đỏ hoặc vàng. Tính xác suất để không có hai bóng đèn kề nhau cùng màu (hai bóng đèn kề nhau là 2 bóng đã được nối với nhau bởi một đoạn dây không đi qua bóng đèn khác).

b) Sau khi đã gắn xong 12 bóng đèn led gồm 3 bóng màu xanh, 4 bóng màu đỏ và 5 bóng màu vàng vào 12 vị trí ô tròn trên mô hình số 60, các bạn học sinh cài đặt chương trình đổi màu cho các bóng đèn. Chương trình đổi màu là mỗi lần chọn 2 bóng khác màu rồi cùng được đổi sang màu còn lại. Hỏi có lúc nào đó cả 12 bóng đèn cùng một màu hay không?

—————**HẾT**—————

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 1. (5,0 điểm)

a) Tìm tất cả các cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn $x + y = x^2 + y^2 = x^4 + y^4$

b) Giải phương trình $2(x^2 - x + 1)^2 + 3x^2 = 2(x^2 + x + 1)^2 + 3(x^2 + 1)^2$.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $s = x + y$, $p = xy$. Khi đó đề bài tương đương với:

$$s = s^2 - 2p = (s^2 - 2p)^2 - 2p^2$$

Khi đó thì rõ ràng có $p = \frac{s^2 - s}{2}$, lúc đó thì ta có:

$$s = s^2 - 2\left(\frac{s^2 - s}{2}\right)^2$$

$$2(s^2 - s) - (s^2 - s)^2 = 0$$

$$(s^2 - s)(s^2 - s - 2) = 0$$

$$s(s - 1)(s + 1)(s - 2) = 0$$

$$s \in \{-1; 0; 1; 2\}$$

– Với $s = 0$ thì $p = 0$, khi đó $x + y = xy = 0$ suy ra $x = y = 0$.

– Với $s = -1$ thì $p = 1$, khi đó $x + y = -1, xy = 1$. Theo định lý Viète thì x, y là nghiệm của phương trình $t^2 + t + 1 = 0$. Nhưng phương trình này rõ ràng vô nghiệm do $\Delta = 1^2 - 4 = -3 < 0$.

– Với $s = 1$ thì $p = 0$, khi đó $x + y = 1, xy = 0$ suy ra $(x, y) \in \{(0, 1); (1, 0)\}$.

– Với $s = 2$ thì $p = 1$, khi đó $x + y = 2, xy = 1$. Lúc đó x, y là nghiệm của phương trình

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$(t - 1)^2 = 0$$

$$t = 1.$$

Khi đó $x = y = 1$.

Vậy, các cặp $(x; y)$ thỏa mãn bài toán là: $(x; y) \in \{(0; 0); (0; 1); (1; 0); (1; 1)\}$.

$$b) 2(x^2 - x + 1)^2 + 3x^2 = 2(x^2 + x + 1)^2 + 3(x^2 + 1)^2$$

$$2(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1) + 3x^2 = 2(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1) + 3(x^4 + 2x^2 + 1)$$

$$2(4x^3 + 4x) + 3(x^2 + 1)^2 - 3x^2 = 0$$

$$3(x^2 + 1)^2 + 8x(x^2 + 1) - 3x^2 = 0$$

$$[3(x^2 + 1) - x][(x^2 + 1) + 3x] = 0$$

$$3x^2 - x + 3 = 0 \text{ hoặc } x^2 + 3x + 1 = 0$$

Nhận xét rằng phương trình đầu tiên vô nghiệm do $\Delta = 1 - 4 \cdot 3^2 = -35 < 0$, còn phương trình thứ hai

$$\text{có 2 nghiệm là } x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Do đó tập nghiệm của phương trình là: } S = \left\{ \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}; \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Câu 2. (3,0 điểm)

a) Cho đa thức $P(x) = x^{2027} + ax^5 + bx$. Tìm tất cả các số nguyên a, b để $P(x)$ chia hết cho 2027 với mọi số nguyên x .

b) Tìm tất cả các số nguyên tố p để $1 + 2^p + 3^p$ là số chính phương.

Hướng dẫn giải

a) Chú ý 2027 là số nguyên tố.

Điều kiện cần: Ta chứng minh rằng với $a \equiv 0 \pmod{2027}$ và $b \equiv -1 \pmod{2027}$ thì $P(x) \equiv 0 \pmod{2027}$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$.

– Nếu $x \equiv 0 \pmod{2027}$ thì $P(x) = x^{2027} + ax^5 + bx \equiv 0 \pmod{2027}$.

– Nếu $x \not\equiv 0 \pmod{2027}$ thì theo định lý Fermat nhỏ, ta có:

$$x^{2026} \equiv 1 \pmod{2027} \Rightarrow x^{2027} \equiv x \pmod{2027}.$$

Do vậy: $P(x) = x^{2027} + ax^5 + bx \equiv x + bx \equiv 0 \pmod{2027}$ (do $b \equiv -1$).

Cả hai trường hợp đều cho ta điều phải chứng minh.

Điều kiện đủ: Ta chứng minh rằng nếu $P(x) \equiv 0 \pmod{2027}$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$ thì $a \equiv 0 \pmod{2027}$ và $b \equiv -1 \pmod{2027}$.

– Có $P(1) \equiv 0 \pmod{2027}$ suy ra $1 + a + b \equiv 0 \pmod{2027}$ (1).

– Có $P(2) \equiv 0 \pmod{2027}$ suy ra $2^{2027} + 32a + 2b \equiv 2 + 32a + 2b \equiv 0 \pmod{2027}$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $30a \equiv 0 \pmod{2027}$ nên $a \equiv 0 \pmod{2027}$.

Từ đây thay vào (1) ta có ngay $b \equiv -1 \pmod{2027}$.

Vậy: $a \equiv 0 \pmod{2027}$ và $b \equiv -1 \pmod{2027}$.

b) Thử trực tiếp $p = 2, 3$ ta chọn được $p = 3$ thỏa mãn ($1 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2$).

Xét $p > 3$. Do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p \equiv 1, 5 \pmod{6}$. Lại có $3^p \equiv 0 \pmod{9}$.

Ta có nhận xét quen thuộc sau: Một số chính phương khi chia cho 9 có số dư là 0, 1, 4, 7.

– Nếu $p \equiv 1 \pmod{6}$ thì $p = 6k + 1$.

Do đó nên $2^p = 2^{6k+1} = 64^k \cdot 2 \equiv 1^k \cdot 2 \equiv 2 \pmod{9}$.

Từ đó ta suy ra $1 + 2^p + 3^p \equiv 1 + 2 + 0 \equiv 3 \pmod{9}$ nên $1 + 2^p + 3^p$ không là số chính phương.

– Nếu $p \equiv 5 \pmod{6}$. Tương tự ta có $2^p = 2^{6k+5} = 64^k \cdot 32 \equiv 1^k \cdot 5 \equiv 5 \pmod{9}$.

Suy ra $1 + 2^p + 3^p \equiv 1 + 5 + 0 \equiv 6 \pmod{9}$ nên $1 + 2^p + 3^p$ không là số chính phương.

Vậy: $p = 3$.

Câu 3. (2,0 điểm) Xét 3 số nguyên a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện đề bài tương đương với:

$$\frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{1}{a+b+c}$$

$$(ab+bc+ca)(a+b+c) = abc$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) = 0$$

Do bài toán có tính đối xứng, ta có thể giả sử $a+b=0$ hay $a=-b$. Vì a, b, c đôi một phân biệt nên ta có $a \neq 0, c \neq a, c \neq -a$.

Do $a \neq 0$ nên $|a| \geq 1$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = (2a)^2 + (-a-c)^2 + (c-a)^2 \\ &= 4a^2 + (a+c)^2 + (c-a)^2 = 6a^2 + 2c^2 = 2(3a^2 + c^2). \end{aligned}$$

Để P nhỏ nhất thì $3a^2 + c^2$ phải nhỏ nhất. Với $|a| \geq 1$ ta có $3a^2 + c^2 \geq 3 + c^2$.

Nếu $|a|=1$ thì $c \neq 0, \pm 1$, do đó $|c| \geq 2$ và $c^2 \geq 4$.

Suy ra $3a^2 + c^2 \geq 3 + 4 = 7$ hay $P \geq 14$.

Dấu bằng xảy ra khi $a=1, b=-1, c=2$.

Thật vậy $1 + \frac{1}{-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1-1+2}$ và $P = (1+1)^2 + (-1-2)^2 + (2-1)^2 = 4+9+1=14$.

Vậy $P_{\min} = 14$ đạt được khi chẳng hạn $(a, b, c) = (1, -1, 2)$.

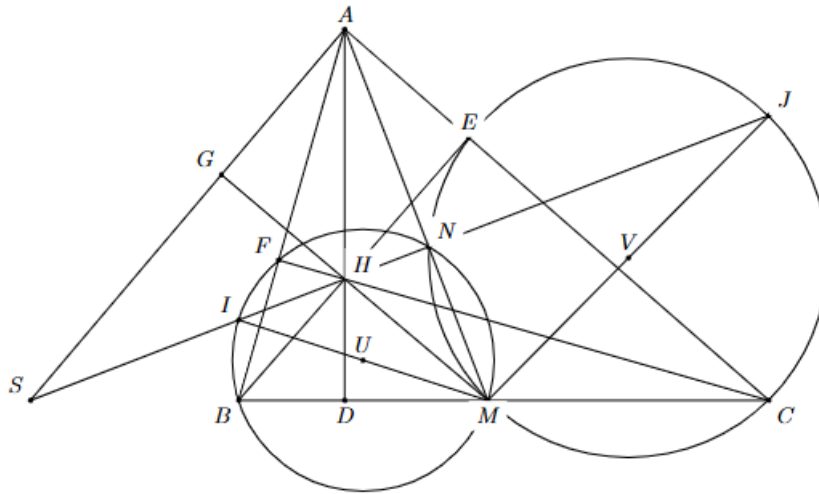
Câu 4. (7,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H . Điểm M di động trên cạnh BC (M khác B và C). Đường tròn ngoại tiếp tam giác CME cắt AM tại điểm thứ hai là N .

a) Chứng minh rằng $AM \cdot AN = AB \cdot AF$.

b) Chứng minh rằng HN vuông góc với AM .

c) MI, MJ lần lượt là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMF, CME . Đường thẳng đi qua A và vuông góc với MH cắt IJ tại S . Chứng minh rằng S luôn thuộc một đường thẳng cố định khi M di động trên cạnh BC .

Hướng dẫn giải



a) Xét $\triangle AEN$ và $\triangle AMC$ có:

$\angle ANE = \angle ACM$ (cùng chắn cung EM) và $\angle MAC$ là góc chung.

Do đó $\triangle AEN \sim \triangle AMC$ (g.g). Suy ra $AE \cdot AC = AM \cdot AN$ (1)

Xét $\triangle AFC$ và $\triangle AEB$ có:

$\angle AEB = \angle AFC = 90^\circ$ và $\angle BAC$ là góc chung.

Do đó $\triangle AFC \sim \triangle AEB$ (g.g). Suy ra $AE \cdot AC = AB \cdot AF$

Từ (1) và (2) suy ra $AM \cdot AN = AB \cdot AF$.

b) Do $\triangle AFH \sim \triangle ADB$ (g.g) suy ra $AD \cdot AH = AB \cdot AF = AM \cdot AN$ hay $\frac{AH}{AN} = \frac{AM}{AD}$.

Lại có góc $\angle HAN$ chung nên $\triangle AHN \sim \triangle AMD$ (c.g.c). Suy ra $\angle ANH = \angle ADM = 90^\circ$.

Vậy $HN \perp AM$.

c) Do $HN \perp MN$, $IN \perp MN$ nên I, H, N thẳng hàng.

Tương tự có J, H, N thẳng hàng. Suy ra I, H, N, J thẳng hàng.

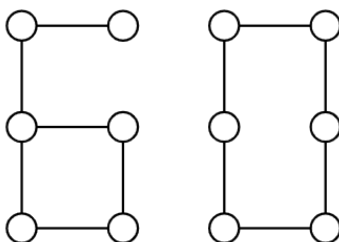
Xét $\triangle AMS$ có: SN là đường cao ứng với đỉnh S .

Lại có: H là trực tâm $\triangle AMS$ suy ra $MS \perp AH$.

Mặt khác $AD \perp BC$ suy ra $AH \perp MD$, từ đó dẫn tới M, S, D thẳng hàng

Do đó $S \in BC$ cố định.

Câu 5. (3,0 điểm) Nhân dịp kỷ niệm 60 năm ngày thành lập trường, các bạn học sinh lớp 10 chuyên Toán – Tin cùng nhau làm một logo trang trí. Logo là mô hình số 60 được gắn đèn led tại 12 vị trí ô tròn cùng dây nối như hình bên.

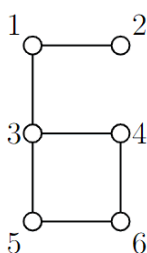


a) Trên mô hình số 6, ở mỗi vị trí ô tròn được lắp một bóng đèn có màu được chọn ngẫu nhiên là một trong ba màu xanh, đỏ hoặc vàng. Tính xác suất để không có hai bóng đèn kề nhau cùng màu (hai bóng đèn kề nhau là 2 bóng đã được nối với nhau bởi một đoạn dây không đi qua bóng đèn khác).

b) Sau khi đã gắn xong 12 bóng đèn led gồm 3 bóng màu xanh, 4 bóng màu đỏ và 5 bóng màu vàng vào 12 vị trí ô tròn trên mô hình số 60, các bạn học sinh cài đặt chương trình đổi màu cho các bóng đèn. Chương trình đổi màu là mỗi lần chọn 2 bóng khác màu rồi cùng được đổi sang màu còn lại. Hỏi có lúc nào đó cả 12 bóng đèn cùng một màu hay không?

Hướng dẫn giải

a)



Đánh số các đèn từ 1 đến 6.

Chọn 1 màu bất kì cho đèn số 3 $\rightarrow$ có 3 cách chọn.

Khi đó, đèn số 1 có 2 cách chọn, đèn số 2 có 2 cách chọn.

Lúc này:

– Nếu đèn số 4 và 5 cùng màu: có 2 trường hợp, đèn số 6 có thể có 2 màu.

– Nếu đèn số 4 và 5 khác màu: đèn số 6 chỉ có thể có 1 màu còn lại, có 2 trường hợp.

Có tất cả $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 2 + 2) = 72$ cách để 2 bóng kề nhau không cùng màu.

Lại có: không gian mẫu $|\Omega| = 3^6 = 729$.

Xác suất là $P = \frac{72}{729} = \frac{8}{81}$.

b) Mỗi lần đổi màu 2 bóng khác màu thành màu còn lại.

Không mất tính tổng quát, giả sử 2 bóng màu xanh và đỏ đổi thành vàng. Khi đó hiệu giữa số bóng của 2 màu bất kì luôn không đổi số dư khi chia cho 3.

Thật vậy, gọi x, y, z là số bóng đèn xanh, đỏ, vàng ở 1 lượt bất kì. Sau khi đổi màu, số bóng theo màu lần lượt là $x-1, y-1, z+2$.

Và:

$$(x-1)-(y-1) \equiv x-y \pmod{3}$$

$$(y-1)-(z+2) \equiv y-z-3 \equiv y-z \pmod{3}$$

$$(z+2)-(x-1) \equiv z-x+3 \equiv z-x \pmod{3}$$

Do vậy, hiệu giữa số bóng đèn xanh và đỏ luôn giữ nguyên số dư khi chia cho 3. Ban đầu $x=3, y=4$ suy ra $x-y=-1$, không chia hết cho 3.

Nếu có lúc 12 bóng cùng màu thì hiệu giữa số bóng đèn xanh và đỏ sẽ là 12, -12 hoặc 0, đều chia hết cho 3 (mâu thuẫn).

Vậy không thể xảy ra trường hợp cả 12 bóng đèn cùng một màu.

—————**HẾT**—————