

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (3,0 điểm).

Thí sinh trả lời câu hỏi từ 1 đến 12, mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời A, B, C, D, viết vào tờ giấy thi một phương án đúng mà thí sinh chọn.

Câu 1. Phương trình nào sau đây là phương trình bậc nhất hai ẩn x và y ?

- A. $x^3 + y = 0$. B. $xy^2 = 1$. C. $2x + y = 2$. D. $-x + 3y + y^2 = 0$.

Câu 2. Hệ phương trình $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ -x - y = 0 \end{cases}$ có một nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$. Giá trị của x_0 bằng

- A. 2. B. 3. C. 6. D. -3.

Câu 3. Điều kiện xác định của biểu thức $\sqrt{x - 2026}$ là

- A. $x > 2026$. B. $x < 2026$. C. $x \geq 2026$. D. $x \neq 2026$.

Câu 4. Biểu thức $P = \sqrt{5}(\sqrt{125} - \sqrt{80})$ có giá trị bằng

- A. 45. B. 5. C. 8. D. 3.

Câu 5. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số $y = 3x^2$?

- A. $(-3; -1)$. B. $(-1; -3)$. C. $(3; 1)$. D. $(1; 3)$.

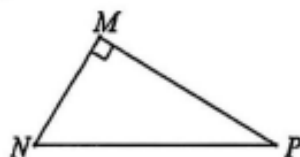
Câu 6. Phương trình nào dưới đây là phương trình bậc hai một ẩn x ?

- A. $5x^2 + x + 3 = 0$. B. $x + \sqrt{x} - 1 = 0$. C. $x^4 - x + 6 = 0$. D. $2x^2 + x^3 - 3 = 0$.

Câu 7. Biết phương trình $x^2 - 6x + 5 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tích hai nghiệm $x_1 x_2$ bằng

- A. 6. B. 5. C. -6. D. -5.

Câu 8. Cho tam giác MNP vuông tại M .



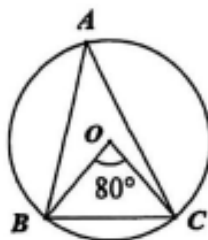
Giá trị $\cos \widehat{MNP}$ bằng

- A. $\frac{MP}{NP}$. B. $\frac{MN}{MP}$. C. $\frac{NP}{MP}$. D. $\frac{MN}{NP}$.

Câu 9. Cho hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị là (P) . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. (P) là một parabol có đỉnh là gốc tọa độ.
B. (P) là một parabol nằm phía dưới trục Ox .
C. (P) là một parabol nhận trục Ox làm trục đối xứng.
D. (P) là một đường thẳng.

Câu 10. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và $\widehat{BOC} = 80^\circ$.



Số đo $\widehat{BAC}$ bằng

- A. 40° . B. 80° . C. 160° . D. 100° .

Câu 11. Cho hai điểm O và O' cách nhau một khoảng 8 cm. Vị trí tương đối của hai đường tròn $(O; 3\text{ cm})$ và $(O'; 5\text{ cm})$ là

- A. cắt nhau. B. tiếp xúc ngoài. C. tiếp xúc trong. D. ngoài nhau.

Câu 12. Thống kê chiều cao (đơn vị tính là cm) của 40 học sinh lớp 9A thu được bảng số liệu sau

Chiều cao (cm)	[150;160)	[160;170)	[170;180)	[180;190)
Số học sinh	15	16	8	1

Số lượng học sinh có chiều cao từ 160 cm đến dưới 170 cm bằng

- A. 31. B. 24. C. 16. D. 10.

PHẦN II. TỰ LUẬN (7,0 điểm).

Câu 1 (1,5 điểm).

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

b) Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} + \frac{1}{\sqrt{a}+1} \right) \cdot \frac{\sqrt{a}-1}{2}$ với $a \geq 0, a \neq 1$.

Câu 2 (0,5 điểm). Trong một hộp chứa 30 viên bi giống nhau về kích thước và chất liệu, mỗi viên bi được ghi một số tự nhiên từ 1 đến 30 (hai viên bi khác nhau ghi hai số khác nhau). Bạn An lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp đã cho. Tính xác suất của biến cố: “Bạn An lấy được viên bi ghi số chia hết cho 3”.

Câu 3 (0,5 điểm). Một cốc thủy tinh chứa nước, bên trong có dạng hình trụ với bán kính đáy $R = 4\text{ cm}$. Chiều cao mực nước ban đầu bên trong cốc bằng 8 cm. Sau đó người ta thả từ từ một viên bi đặc không thấm nước có dạng hình cầu bán kính $r = 3\text{ cm}$ vào trong cốc sao cho viên bi chìm hoàn toàn trong nước và nước không tràn ra ngoài. Tính chiều cao theo đơn vị centimet của mực nước trong cốc sau khi thả viên bi.



Câu 4 (1,0 điểm). Một công ty nhận được đơn đặt hàng 4000 sản phẩm. Mỗi máy của công ty sản xuất được 50 sản phẩm trong một giờ. Khi thực hiện đơn hàng, mỗi giờ công ty cần trả 600 nghìn đồng chi phí cho nhân công. Ngoài ra, chi phí bảo trì cho một máy trong đơn hàng trên là 400 nghìn đồng. Giả sử hệ thống máy của công ty làm việc với công suất như nhau.

a) Gọi x là số lượng máy công ty sử dụng cho đơn hàng trên (điều kiện $x \in \mathbb{N}^*$). Biểu diễn theo x các đại lượng sau: số sản phẩm của công ty làm được trong một giờ và tổng số giờ công ty làm xong đơn hàng.

b) Công ty dự kiến tổng chi phí nhân công và bảo trì máy thực hiện đơn hàng là 11920 nghìn đồng. Hỏi công ty phải sử dụng bao nhiêu máy để thực hiện xong đơn hàng trên?

Câu 5 (3,0 điểm). Cho đường tròn tâm O bán kính R , đường kính AB cố định. Một điểm M thay đổi trên đường tròn (O) (M khác A và B). Tiếp tuyến tại M của đường tròn (O) cắt các tiếp tuyến tại A , tại B của đường tròn (O) lần lượt tại C và D .

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, C, M, O cùng thuộc một đường tròn.

b) Đường thẳng BC cắt OD, OM lần lượt tại K, N . Đường thẳng OC cắt AN tại H . Hai đường thẳng AC và OD cắt nhau tại E . Chứng minh rằng $\frac{HN}{HA} = \frac{ON}{OA}$ và EH vuông góc với CK .

c) Đường thẳng EH cắt AB, BC lần lượt tại T, S . Tính độ dài AM theo R khi diện tích tam giác BST đạt giá trị lớn nhất.

Câu 6 (0,5 điểm). Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{2-xy} + \frac{1}{2-yz} + \frac{1}{2-zx}$.

.....Hết.....

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Thí sinh không sử dụng tài liệu. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 02 trang)

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM KHÁC QUAN (3,0 điểm).

Thí sinh trả lời câu hỏi từ 1 đến 12, mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời A, B, C, D viết vào tờ giấy thi một phương án đúng mà thí sinh chọn.

Câu 1. Phương trình nào sau đây là phương trình bậc nhất hai ẩn x và y ?

- A. $x^3 + y = 0$. B. $xy^2 = 1$. C. $2x + y = 2$. D. $-x + 3y + y^2 = 0$.

Câu 2. Hệ phương trình $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ -x - y = 0 \end{cases}$ có một nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$. Giá trị của x_0 bằng

- A. 2. B. 3. C. 6. D. -3.

Câu 3. Điều kiện xác định của biểu thức $\sqrt{x - 2026}$ là

- A. $x > 2026$. B. $x < 2026$. C. $x \geq 2026$. D. $x \neq 2026$.

Câu 4. Biểu thức $P = \sqrt{5}(\sqrt{125} - \sqrt{80})$ có giá trị bằng

- A. 45. B. 5. C. 8. D. 3.

Câu 5. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số $y = 3x^2$?

- A. $(-3; -1)$. B. $(-1; -3)$. C. $(3; 1)$. D. $(1; 3)$.

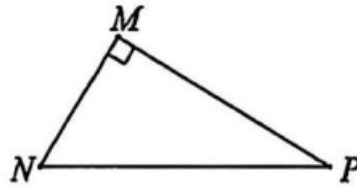
Câu 6. Phương trình nào dưới đây là phương trình bậc hai một ẩn x ?

- A. $5x^2 + x + 3 = 0$. B. $x + \sqrt{x} - 1 = 0$. C. $x^4 - x + 6 = 0$. D. $2x^2 + x^3 - 3 = 0$.

Câu 7. Biết phương trình $x^2 - 6x + 5 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tích hai nghiệm $x_1 x_2$ bằng

- A. 6. B. 5. C. -6. D. -5.

Câu 8. Cho tam giác MNP vuông tại M .



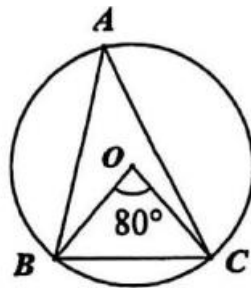
Giá trị $\cos \angle MNP$ bằng

- A. $\frac{MP}{NP}$. B. $\frac{MN}{MP}$. C. $\frac{NP}{MP}$. D. $\frac{MN}{NP}$.

Câu 9. Cho hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị là (P) . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. (P) là một parabol có đỉnh là gốc tọa độ.
 B. (P) là một parabol nằm phía dưới trục Ox .
 C. (P) là một parabol nhận trục Ox làm trục đối xứng.
 D. (P) là một đường thẳng.

Câu 10. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và $\angle BOC = 80^\circ$.



Số đo $\angle BAC$ bằng.

- A. 40° . B. 80° . C. 160° . D. 100° .

Câu 11. Cho hai điểm O và O' cách nhau một khoảng 8 cm. Vị trí tương đối của hai đường tròn là $(O; 3 \text{ cm})$ và $(O'; 5 \text{ cm})$ là

- A. cắt nhau. B. tiếp xúc ngoài. C. tiếp xúc trong. D. ngoài nhau.

Câu 12. Thống kê chiều cao (đơn vị tính là cm) của 40 học sinh lớp 9A thu được bảng số liệu sau:

Chiều cao (cm)	[150; 160)	[160; 170)	[170; 180)	[180; 190)
Số học sinh	15	16	8	1

Số lượng học sinh có chiều cao từ 160 cm đến dưới 170 cm bằng

A. 31.

B. 24.

C. 16.

D. 10.

PHẦN II. TỰ LUẬN (7,0 điểm).

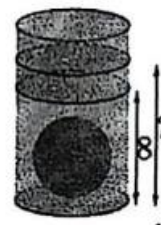
Câu 1 (1,5 điểm).

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + y = 8 \end{cases}.$$

b) Rút gọn biểu thức
$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} + \frac{1}{\sqrt{a}+1} \right) \cdot \frac{\sqrt{a}-1}{2} \text{ với } a \geq 0, a \neq 1.$$

Câu 2 (0,5 điểm). Trong một hộp chứa 30 viên bi giống nhau về kích thước và chất liệu, mỗi viên bi được ghi một số tự nhiên từ 1 đến 30 (hai viên bi khác nhau ghi hai số khác nhau). Bạn An lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp đã cho. Tính xác suất của biến cố: “Bạn An lấy được viên bi ghi số chia hết cho 3”.

Câu 3 (0,5 điểm). Một cốc thủy tinh chứa nước, bên trong có dạng hình trụ với bán kính đáy $R = 4$ cm. Chiều cao mực nước bên ban đầu bên trong cốc bằng 8 cm. Sau đó người ta thả từ từ một viên bi đặc không ngấm nước có dạng hình cầu bán kính $r = 3$ cm vào trong cốc sao cho viên bi chìm hoàn toàn trong nước và không tràn ra ngoài. Tính chiều cao theo đơn vị centimet của mực nước trong cốc sau khi thả viên bi.



Câu 4 (1,0 điểm). Một công ty nhận được đơn đặt hàng 400 sản phẩm. Mỗi máy của công ty sản xuất được 50 sản phẩm trong một giờ. Khi thực hiện đơn hàng, mỗi giờ công ty cần trả 600 nghìn đồng chi phí cho nhân công. Ngoài ra, chi phí bảo trì cho một máy trong đơn hàng trên là 400 nghìn đồng. Giả sử hệ thống máy của công ty làm việc với công suất như nhau.

a) Gọi x là số lượng máy công ty sử dụng cho đơn hàng trên (điều kiện $x \in \mathbb{N}^*$). Biểu diễn theo x các đại lượng sau: số sản phẩm của công ty làm được trong một giờ và tổng số giờ công ty làm xong đơn hàng.

b) Công ty dự kiến tổng chi phí nhân công và bảo trì máy thực hiện đơn hàng là 11 920 nghìn đồng. Hỏi công ty phải sử dụng bao nhiêu máy để thực hiện xong đơn hàng trên?

Câu 5 (3,0 điểm). Cho đường tròn tâm O bán kính R , đường kính AB cố định. Một điểm M thay đổi trên đường tròn (O) (M khác A và B). Tiếp tuyến tại M của đường tròn (O) cắt các tiếp tuyến tại A , tại B của đường tròn (O) lần lượt tại C và D .

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, C, M, O cùng thuộc một đường tròn.

b) Đường thẳng BC cắt OD, OM lần lượt tại K, N . Đường thẳng OC cắt AN tại H . Hai

đường thẳng AC và OD cắt nhau tại E . Chứng minh rằng $\frac{HN}{HA} = \frac{ON}{OA}$ và EH vuông góc với CK .

c) Đường thẳng EH cắt AB, BC lần lượt tại T, S . Tính độ dài AM theo R khi diện tích tam giác BST đạt giá trị lớn nhất.

Câu 6 (0,5 điểm). Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Tính giá trị lớn nhất của biểu

thức $P = \frac{1}{2-xy} + \frac{1}{2-yz} + \frac{1}{2-xz}$.

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Thí sinh không sử dụng tài liệu. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

Thời gian làm bài: 120 phút, không kể thời gian giao đề

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 02 trang)

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM KHÁC QUAN (3,0 điểm).

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	C	D	C	B	D	A	B	D	A	A	B	C

PHẦN II. TỰ LUẬN (7,0 điểm)

Câu 1 (1,5 điểm).

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + y = 8 \end{cases}.$$

b) Rút gọn biểu thức
$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} + \frac{1}{\sqrt{a}+1} \right) \cdot \frac{\sqrt{a}-1}{2} \text{ với } a \geq 0, a \neq 1.$$

Hướng dẫn giải

a) Giải hệ phương trình được nghiệm là $(x; y) = (3; 2).$

b) Với $a \geq 0, a \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} + \frac{1}{\sqrt{a}+1} \right) \cdot \frac{\sqrt{a}-1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{a}+1+\sqrt{a}-1}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \cdot \frac{\sqrt{a}-1}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \cdot \frac{\sqrt{a}-1}{2} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}. \end{aligned}$$

Vậy với $a \geq 0, a \neq 1$ thì $A = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}.$

Câu 2 (0,5 điểm). Trong một hộp chứa 30 viên bi giống nhau về kích thước và chất liệu, mỗi viên bi được ghi một số tự nhiên từ 1 đến 30 (hai viên bi khác nhau ghi hai số khác nhau). Bạn An lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp đã cho. Tính xác suất của biến cố: “Bạn An lấy được viên bi ghi số chia hết cho 3”.

Hướng dẫn giải

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 30$.

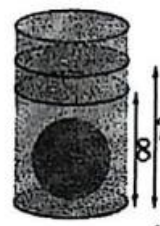
Gọi A là biến cố: “Bạn An lấy được viên bi ghi số chia hết cho 3”.

Ta có các kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $\{3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27; 30\}$.

Do đó, số kết quả thuận lợi $n(A) = 10$.

Xác suất của biến cố A là
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Câu 3 (0,5 điểm). Một cốc thủy tinh chứa nước, bên trong có dạng hình trụ với bán kính đáy $R = 4$ cm. Chiều cao mực nước ban đầu bên trong cốc bằng 8 cm. Sau đó người ta thả từ từ một viên bi đặc không ngấm nước có dạng hình cầu bán kính $r = 3$ cm vào trong cốc sao cho viên bi chìm hoàn toàn trong nước và không tràn ra ngoài. Tính chiều cao theo đơn vị centimet của mực nước trong cốc sau khi thả viên bi.



Hướng dẫn giải

Thể tích nước ban đầu trong cốc là $V_1 = \pi \cdot R^2 \cdot h_1 = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 = 128\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.

Thể tích của viên bi hình cầu là: $V_2 = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 3^3 = 36\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.

Thể tích tổng cộng của nước và viên bi khi bị chìm hoàn toàn là:

$$V = V_1 + V_2 = 128\pi + 36\pi = 164\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Gọi h là chiều cao mực nước sau khi thả viên bi. Ta có: $V = \pi \cdot R^2 \cdot h$.

Khi đó, ta có: $164\pi = \pi \cdot 4^2 \cdot h$ suy ra $h = \frac{164\pi}{16\pi} = 10,25 \text{ (cm)}$.

Chiều cao mực nước sau khi thả viên bi là 10,25 cm.

Câu 4 (1,0 điểm). Một công ty nhận được đơn đặt hàng 400 sản phẩm. Mỗi máy của công ty sản xuất được 50 sản phẩm trong một giờ. Khi thực hiện đơn hàng, mỗi giờ công ty cần trả 600 nghìn đồng chi phí cho nhân công. Ngoài ra, chi phí bảo trì cho một máy trong đơn hàng trên là 400 nghìn đồng. Giả sử hệ thống máy của công ty làm việc với công suất như nhau.

a) Gọi x là số lượng máy công ty sử dụng cho đơn hàng trên (điều kiện $x \in \mathbb{N}^*$). Biểu diễn theo x các đại lượng sau: số sản phẩm của công ty làm được trong một giờ và tổng số giờ công ty làm xong đơn hàng.

b) Công ty dự kiến tổng chi phí nhân công và bảo trì máy thực hiện đơn hàng là 11 920 nghìn đồng. Hỏi công ty phải sử dụng bao nhiêu máy để thực hiện xong đơn hàng trên?

Hướng dẫn giải

a) Gọi x là số lượng máy công ty sử dụng cho đơn hàng trên (điều kiện $x \in \mathbb{N}^*$).

Số sản phẩm công ty làm được trong một giờ là: $50x$ (sản phẩm).

Tổng số giờ công ty làm xong đơn hàng 4000 sản phẩm là: $\frac{4\,000}{50x} = \frac{80}{x}$ (giờ)

Theo đề bài, tổng chi phí bằng chi phí nhân công cộng chi phí bảo trì.

Tổng chi phí nhân công: $600 \cdot \frac{80}{x} = \frac{48\,000}{x}$ (nghìn đồng).

Tổng chi phí bảo trì cho x máy là: $400x$ (nghìn đồng).

b) Ta có phương trình tổng chi phí $\frac{48\,000}{x} + 400x = 11\,920$.

Chia cả hai vế cho 40 và nhân với x (do $x > 0$) ta được:

$$10x^2 - 298x + 1200 = 0 \text{ suy ra } 5x^2 - 149x + 600 = 0.$$

Do $\Delta = 149^2 - 4 \cdot 5 \cdot 600 = 10\,201 = 101^2$ nên ta được: $x_1 = 25$ (TM); $x_2 = 4,8$ (loại)

Vậy công ty phải sử dụng 25 máy.

Câu 5 (3,0 điểm). Cho đường tròn tâm O bán kính R , đường kính AB cố định. Một điểm M thay đổi trên đường tròn (O) (M khác A và B). Tiếp tuyến tại M của đường tròn (O) cắt các tiếp tuyến tại A , tại B của đường tròn (O) lần lượt tại C và D .

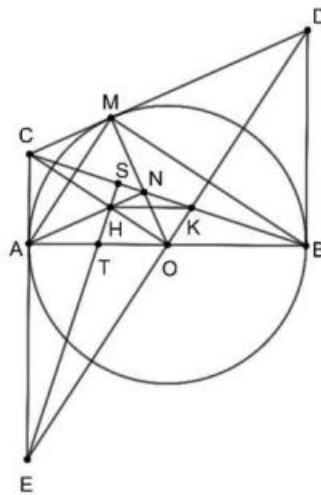
a) Chứng minh rằng bốn điểm A, C, M, O cùng thuộc một đường tròn.

b) Đường thẳng BC cắt OD, OM lần lượt tại K, N . Đường thẳng OC cắt AN tại H . Hai

đường thẳng AC và OD cắt nhau tại E . Chứng minh rằng $\frac{HN}{HA} = \frac{ON}{OA}$ và EH vuông góc với CK .

c) Đường thẳng EH cắt AB, BC lần lượt tại T, S . Tính độ dài AM theo R khi diện tích tam giác BST đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải



a) Vì CA, CM là tiếp tuyến của (O) nên $\angle CAO = \angle CMO = 90^\circ$.

Khi đó bốn điểm A, C, M, O cùng thuộc đường tròn đường kính CO .

b) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, OC là tia phân giác của $\angle AOM$.

Do $N \in OM, H \in OC$ suy ra OH là phân giác của góc AON trong $\triangle AON$.

Áp dụng định lý đường phân giác trong $\triangle AON$ ta có: $\frac{HN}{HA} = \frac{ON}{OA}$.

Chứng minh tương tự có $\frac{KN}{KB} = \frac{ON}{OB}$. Từ đó, suy ra $\frac{HN}{HA} = \frac{KN}{KB}$.

Áp dụng định lý Thales đảo suy ra $KH \parallel AB$, mà $AB \perp AC$ nên $KH \perp AC$ hay $KH \perp EC$.

Mặt khác OC, OD lần lượt là tia phân giác của hai góc kề bù $\angle AOM$ và $\angle MOB$ nên $OC \perp OD$ hay $CO \perp KE$.

Trong tam giác CEK có hai đường cao KH, CO cắt nhau tại H nên H là trực tâm.

Suy ra $EH \perp CK$ hay $HE \perp CB$.

c) Chứng minh được $\triangle BCA \sim \triangle ETA$ suy ra $\frac{BA}{EA} = \frac{CA}{TA}$ suy ra $AC \cdot EA = BA \cdot TA$.

Vì $\triangle CAO \sim \triangle OAE$ nên $CA \cdot EA = AO^2$.

Do đó, $BA \cdot TA = AO^2$ nên T là trung điểm của OA .

Khi đó T là điểm cố định và $TB = \frac{3R}{2}$.

Ta có: $S_{BST} = \frac{1}{2} BS \cdot ST \leq \frac{1}{2} \frac{BS^2 + ST^2}{2} = \frac{BT^2}{2} = \frac{9R^2}{16}$.

Dấu “=” xảy ra (diện tích lớn nhất) khi và chỉ khi $BS = ST$ hay $\triangle BST$ vuông cân tại S .

Khi đó $\angle CBA = 45^\circ$.

Trong $\triangle ABC$ có $\angle A = 90^\circ, \angle B = 45^\circ$ nên $\triangle ABC$ vuông cân tại A .

Suy ra $AC = AB = 2R$.

Tính được $OC = \sqrt{OA^2 + AC^2} = R\sqrt{5}$.

Theo hệ thức lượng trong $\triangle AOC$ tính được $AP = \frac{OA \cdot AC}{OC} = \frac{2R\sqrt{5}}{5}$.

Suy ra $AM = 2AP = \frac{4R\sqrt{5}}{5}$.

Câu 6 (0,5 điểm). Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Tính giá trị lớn nhất của biểu

thức $P = \frac{1}{2-xy} + \frac{1}{2-yz} + \frac{1}{2-xz}$.

Hướng dẫn giải

Ta thấy $\frac{1}{2-xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{2-xy+xy}{2-xy} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{xy}{2-xy} \right)$

Tương tự suy ra $P = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{xy}{2-xy} + \frac{yz}{2-yz} + \frac{xz}{2-zx} \right)$

Ta có biến đổi:
$$2 - xy = \frac{4 - 2xy}{2} = \frac{2(x^2 + y^2 + z^2) - 2xy}{2} = \frac{x^2 + y^2 + 2z^2 + (x - y)^2}{2}$$

Vì $(x - y)^2 \geq 0$ ta có: $2 - xy \geq \frac{x^2 + y^2 + 2z^2}{2}$ suy ra $\frac{1}{2 - xy} \leq \frac{2}{x^2 + y^2 + 2z^2}$.

Suy ra
$$\frac{xy}{2 - xy} \leq \frac{2xy}{x^2 + y^2 + 2z^2} = \frac{2xy}{(x^2 + z^2) + (y^2 + z^2)}.$$

Áp dụng BĐT AM – GM cho mẫu số: $(x^2 + z^2) + (y^2 + z^2) \geq 2\sqrt{(x^2 + z^2)(y^2 + z^2)}$

Ta được
$$\frac{xy}{2 - xy} \leq \frac{xy}{\sqrt{(x^2 + z^2)(y^2 + z^2)}} = \sqrt{\frac{x}{x^2 + z^2} \cdot \frac{y}{y^2 + z^2}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x^2 + z^2} + \frac{y}{y^2 + z^2} \right)$$

Chứng minh tương tự với $\frac{yz}{2 - yz}$; $\frac{xz}{2 - zx}$ rồi cộng theo vế, được:

$$\frac{1}{2 - xy} + \frac{1}{2 - yz} + \frac{1}{2 - zx} \leq \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{x^2 + z^2} + \frac{z}{z^2 + z^2} \right) + \left(\frac{x}{x^2 + z^2} + \frac{y}{y^2 + z^2} \right) + \left(\frac{z}{z^2 + z^2} + \frac{y}{y^2 + z^2} \right) \right] = \frac{3}{2}$$

Từ đó, suy ra
$$P \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi
$$x = y = z = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức
$$P = \frac{9}{4} \text{ khi } x = y = z = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$