

UBND TỈNH PHÚ THỌ
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRUNG HỌC
PHỔ THÔNG
NĂM HỌC 2026 – 2027
MÔN THI: TOÁN

(Dành cho thí sinh dự thi vào lớp chuyên Toán)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (3,0 điểm)

a) Một khách sạn mở cửa 24 giờ mỗi ngày. Quản lý phân công vị trí trực lễ tân theo giờ. Số giờ trực được chia đều cho số nhân viên lễ tân. Sau khi tuyển thêm 1 nhân viên mới thì thời gian trực của mỗi nhân viên lễ tân giảm 48 phút. Hỏi ban đầu khách sạn có bao nhiêu nhân viên lễ tân?

b) Cho $P(x)$ là đa thức bậc 3 thỏa mãn $P(1) = 2$, $P(2) = 3$, $P(3) = 4$, $P(4) = 17$. Tính giá trị $P(0)$.

c) Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 2x + 16} = x - 1 + \frac{3}{x - 1}$.

Câu 2. (1,5 điểm) Cho m, n là hai số nguyên dương, $m > 1$ và p là số nguyên tố lẻ sao cho $p^m = 1 + 5 \cdot 2^n$.

a) Chứng minh rằng m là số chẵn.

b) Tìm tất cả các bộ (m, n, p) thỏa mãn.

Câu 3. (1,5 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$.

a) Chứng minh rằng $\frac{1}{ab+b+1} + \frac{1}{bc+c+1} + \frac{1}{ca+a+1} = 1$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{3a+4b+2c} + \frac{1}{3b+4c+2a} + \frac{1}{3c+4a+2b}$.

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Gọi EM, FN là hai đường cao của tam giác DEF . Gọi I' là điểm đối xứng của I qua EF .

a) Chứng minh rằng MN song song BC và I' là trực tâm của tam giác AEF .

b) Chứng minh rằng $DFI' = MEC$ và $I'MC = 90^\circ$.

c) Gọi S là giao điểm của IC với DE , T là giao điểm của ID với MC . Chứng minh rằng 5 điểm I', M, N, S, T cùng nằm trên một đường tròn.

Câu 5. (1,0 điểm) Ban đầu trên bảng có 100 số 1. Mỗi bước bạn An chọn một số a bất kỳ trên bảng sau đó xóa nó đi và thay thế bởi bốn số $\frac{a}{4}, \frac{a}{4}, \frac{a}{4}, \frac{a}{4}$. Chẳng hạn, nếu chọn số 1 thì An sẽ thay thế bởi bốn số $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$.

a) Hãy chỉ ra một cách thực hiện để sau hữu hạn bước, trên bảng không có 77 số giống nhau.

b) Tìm số nguyên dương k lớn nhất sao cho bất kể bạn An chọn số như thế nào thì sau mỗi bước, trên bảng luôn tồn tại ít nhất k số giống nhau.

-----HẾT-----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

UBND TỈNH PHÚ THỌ
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐỀ CHÍNH THỨC

Đáp án và hướng dẫn giải
KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRUNG HỌC
PHỔ THÔNG
NĂM HỌC 2026 – 2027
MÔN THI: TOÁN

Câu 1. (3,0 điểm)

a) Một khách sạn mở cửa 24 giờ mỗi ngày. Quản lý phân công vị trí trực lễ tân theo giờ. Số giờ trực được chia đều cho số nhân viên lễ tân. Sau khi tuyển thêm 1 nhân viên mới thì thời gian trực của mỗi nhân viên lễ tân giảm 48 phút. Hỏi ban đầu khách sạn có bao nhiêu nhân viên lễ tân?

b) Cho $P(x)$ là đa thức bậc 3 thỏa mãn $P(1) = 2$, $P(2) = 3$, $P(3) = 4$, $P(4) = 17$. Tính giá trị $P(0)$.

c) Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 2x + 16} = x - 1 + \frac{3}{x - 1}$.

Hướng dẫn giải

a) Gọi x là số nhân viên lễ tân ban đầu của khách sạn ($x \in \mathbb{N}^*$).

Tổng thời gian trực mỗi ngày là 24 giờ nên thời gian trực ban đầu của mỗi nhân viên là: $\frac{24}{x}$ (giờ).

Sau khi tuyển thêm 1 nhân viên, tổng số nhân viên là $x + 1$ (người) nên thời gian trực của mỗi nhân viên sau khi có người mới là $\frac{24}{x + 1}$ (giờ).

Vì thời gian trực của mỗi nhân viên lễ tân giảm đi 48 phút $= \frac{4}{5}$ giờ, ta có phương trình:

$$\frac{24}{x} - \frac{24}{x + 1} = \frac{4}{5}$$

Phương trình tương đương với $\frac{24}{x(x + 1)} = \frac{4}{5}$ hay $(x - 5)(x + 6) = 0$.

Từ đó phương trình có hai nghiệm $x = 5$ (thỏa mãn) và $x = -6$ (loại).

Vậy ban đầu khách sạn có 5 nhân viên lễ tân.

b) Đặt $Q(x) = P(x) - (x + 1)$.

Khi đó $Q(1) = Q(2) = Q(3) = 0$ nên $x = 1, x = 2$ và $x = 3$ là ba nghiệm của đa thức bậc 3 $Q(x)$.

Do $P(x)$ bậc 3 nên $Q(x)$ cũng bậc 3, từ đó:

$$Q(x) = a(x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

với a là hệ số cao nhất của $P(x)$.

Ta có $Q(4) = P(4) - 5 = 17 - 5 = 12$.

Mặt khác $Q(4) = a(4-1)(4-2)(4-3) = 6a \Rightarrow 6a = 12 \Rightarrow a = 2$.

Từ đó tính được $Q(0) = 2(0-1)(0-2)(0-3) = -12$.

Do $Q(0) = P(0) - 1$, ta có $P(0) = -12 + 1 = -11$.

c) ĐKXĐ: $x \neq 1$.

Đặt $t = x - 1$. Phương trình trở thành: $\sqrt{t^2 + 15} = t + \frac{3}{t}$

$$\text{Tương đương với: } \begin{cases} t + \frac{3}{t} \geq 0 \\ t^2 + 15 = \left(t + \frac{3}{t}\right)^2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} t + \frac{3}{t} \geq 0 \\ t^2 + 15 = t^2 + 6 + \frac{9}{t^2} \end{cases}$$
$$\begin{cases} t + \frac{3}{t} \geq 0 \\ 9 = \frac{9}{t^2} \end{cases}$$

Tương đương $t^2 = 1$ suy ra $t = 1$ (vì $t + \frac{3}{t} \geq 0$).

Từ đó $x - 1 = 1$ suy ra $x = 2$ (thỏa mãn ĐKXĐ).

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{2\}$.

Câu 2. (1,5 điểm) Cho m, n là hai số nguyên dương, $m > 1$ và p là số nguyên tố lẻ sao cho $p^m = 1 + 5 \cdot 2^n$.

a) Chứng minh rằng m là số chẵn.

b) Tìm tất cả các bộ (m, n, p) thỏa mãn.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử phản chứng m lẻ, phương trình đã cho trở thành:

$$p^m - 1 = (p - 1)(p^{m-1} + p^{m-2} + \dots + 1) = 5 \cdot 2^n$$

Vì m lẻ và p lẻ nên tổng $(p^{m-1} + p^{m-2} + \dots + 1)$ gồm m số lẻ cộng lại, do đó tổng này là số lẻ.

Suy ra $p^{m-1} + p^{m-2} + \dots + 1 \in \{1, 5\}$.

Mặt khác $p \geq 3$, $m \geq 3$ nên:

$$p^{m-1} + p^{m-2} + \dots + 1 \geq 3^2 + 3 + 1 = 13 \text{ (mâu thuẫn).}$$

Suy ra điều giả sử là sai. Vậy m là số chẵn.

b) Vì m chẵn nên ta đặt $m = 2k$ với k nguyên dương. Khi đó:

$$(p^k - 1)(p^k + 1) = 5 \cdot 2^n$$

Vì $\gcd(p^k + 1, p^k - 1)$ chia hết cho $(p^k + 1) - (p^k - 1) = 2$ và p lẻ nên $p^k + 1, p^k - 1$ đều chẵn. Suy ra $\gcd(p^k + 1, p^k - 1) = 2$.

Do đó $p^k - 1$ và $p^k + 1$ không đồng thời chia hết cho 4.

Kết hợp với $p^k - 1 < p^k + 1$, ta có các trường hợp sau:

- Nếu $p^k - 1 = 5 \cdot 2$ và $p^k + 1 = 2^{n-1}$ thì $p^k = 11$, suy ra $p = 11, k = 1$, nhưng $12 = 2^{n-1}$ không có nghiệm nguyên n .
- Nếu $p^k - 1 = 2^{n-1}$ và $p^k + 1 = 5 \cdot 2$ thì $p^k + 1 = 10$ nên $p^k = 9$ suy ra $p = 3, k = 2$.
Suy ra $2^{n-1} = 8$ nên $n = 4$. Ta có $m = 4$. Thử lại thấy thỏa mãn.
- Nếu $p^k + 1 = 5 \cdot 2^{n-1}$ và $p^k - 1 = 2$ thì $p^k = 3$ suy ra $p = 3, k = 1$. Suy ra $4 = 5 \cdot 2^{n-1}$ (không có n thỏa mãn).

Vậy tất cả các bộ (m, n, p) thỏa mãn là $(4, 4, 3)$.

Câu 3. (1,5 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$.

a) Chứng minh rằng $\frac{1}{ab+b+1} + \frac{1}{bc+c+1} + \frac{1}{ca+a+1} = 1$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{3a+4b+2c} + \frac{1}{3b+4c+2a} + \frac{1}{3c+4a+2b}$.

Hướng dẫn giải

a) Với $abc = 1$ ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{ab+b+1} + \frac{1}{bc+c+1} + \frac{1}{ca+a+1} \\ & \frac{1}{ab+b+1} + \frac{1}{bc+c+1} + \frac{1}{ca+a+1} = \frac{1}{ab+b+1} + \frac{ab}{ab(bc+c+1)} + \frac{b}{b(ca+a+1)} \\ & = \frac{1}{ab+b+1} + \frac{ab}{ab^2c+abc+ab} + \frac{b}{abc+ab+b} \\ & = \frac{1}{ab+b+1} + \frac{ab}{b+1+ab} + \frac{b}{1+ab+b} = \frac{1+ab+b}{ab+b+1} = 1. \end{aligned}$$

b) Áp dụng bất đẳng thức $\frac{(x+y)^2}{A+B} \leq \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B}$:

$$\frac{1}{3a+4b+2c} = \frac{1}{(a+b+c)+(2a+3b+c)} \leq \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{a+b+c} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2a+3b+c}$$

Tương tự với các phân thức còn lại, ta được:

$$P \leq \frac{1}{3(a+b+c)} + \frac{4}{9} \left(\frac{1}{2a+3b+c} + \frac{1}{2b+3c+a} + \frac{1}{2c+3a+b} \right)$$

Đặt $a = x^2, b = y^2, c = z^2$ với $xyz = 1$. Khi đó:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2a+3b+c} &= \frac{1}{2x^2+3y^2+z^2} = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)+x^2+2y^2} \leq \frac{1}{3+x^2+2y^2} \\ &= \frac{1}{(x^2+y^2)+(y^2+1)+2} \leq \frac{1}{2xy+2y+2} = \frac{1}{2(xy+y+1)} \end{aligned}$$

Tương tự, ta suy ra:

$$\sum \frac{1}{2a+3b+c} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{xy+y+1} + \frac{1}{yz+z+1} + \frac{1}{zx+x+1} \right) = \frac{1}{2}.$$

Mặt khác, theo AM-GM ta có $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$.

Như vậy:

$$P \leq \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. Giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{3}$.

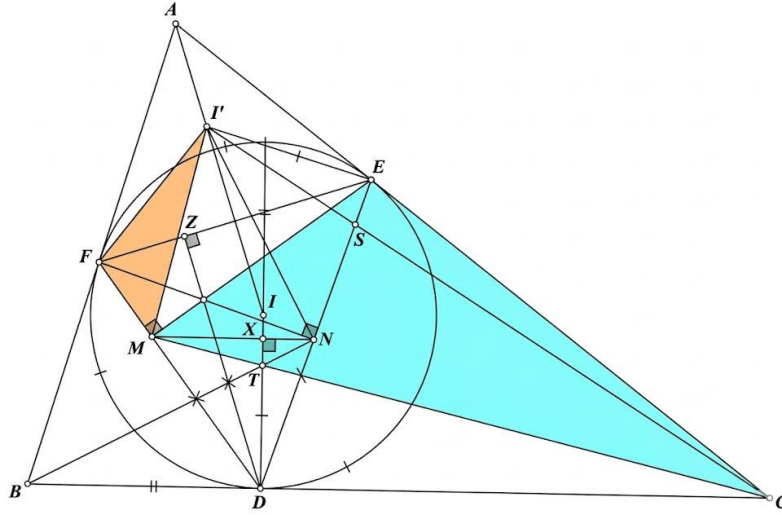
Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Gọi EM, FN là hai đường cao của tam giác DEF . Gọi I' là điểm đối xứng của I qua EF .

a) Chứng minh rằng MN song song BC và I' là trực tâm của tam giác AEF .

b) Chứng minh rằng $DFI' = MEC$ và $I'MC = 90^\circ$.

c) Gọi S là giao điểm của IC với DE , T là giao điểm của ID với MC . Chứng minh rằng 5 điểm I', M, N, S, T cùng nằm trên một đường tròn.

Hướng dẫn giải



a) Ta có $FMEN$ là tứ giác nội tiếp nên $DMN = FED = BDF$, suy ra $MN \parallel BC$.

Lại có I' đối xứng với I qua EF nên $II' \perp EF$, mà $AI \perp EF$ nên A, I', I thẳng hàng.

Mặt khác II' đi qua trung điểm EF nên $FI'EI$ là hình thoi, suy ra $FI' \parallel IE$, do đó $FI' \perp AE$.

Từ đó ta có I' là trực tâm của tam giác AEF .

b) Ta có $I'E = I'F$ nên $I'EF = I'FE$ và $AF = AE$ nên $AFI' = AEI'$.

Biến đổi góc:

$$\begin{aligned} AFI' + BFD &= AEI' + FED = AEI' + FEM + MED \\ &= AEI' + FEM + 90^\circ - EDF = AEI' + FEM + 90^\circ - AFE \\ &= AEI' + FEM + I'EF = AEM \end{aligned}$$

Suy ra $DFI' = MEC$. Lại có $EMF = IEC$ và $EFM = \frac{EID}{2} = EIC$ nên $\triangle EMF \sim \triangle CEI$ (g.g).

Từ đó $\frac{CE}{ME} = \frac{IE}{MF} = \frac{I'F}{MF}$, suy ra $\triangle I'FM \sim \triangle CEM$ (c.g.c). Suy ra $\triangle FME \sim \triangle I'MC$ (c.g.c).

Do đó $FME = I'MC = 90^\circ$.

c) Kẻ ID giao MN tại X , $DZ \perp EF$. Khi đó ta có $\triangle DMN \sim \triangle DEF$ có DX, DZ là các đường cao

tương ứng nên $\frac{XN}{XM} = \frac{FZ}{ZE}$.

Lại có $DZ \perp EF$ nên ZD là phân giác của góc BZC , suy ra $\frac{BD}{DC} = \frac{BZ}{ZC} = \frac{FZ}{ZE} = \frac{XN}{XM}$.

Áp dụng chùm đường thẳng đồng quy suy ra MC, NB, ID đồng quy tại T hay B, T, N thẳng hàng.

Tương tự câu b, ta suy ra $I'NT = I'MT = 90^\circ$ nên $I'MTN$ là tứ giác nội tiếp. Lại có:

$$MI'S = 90^\circ - FCM = 90^\circ - FEM = MFE = DNM$$

Suy ra $MI'SN$ là tứ giác nội tiếp. Vậy 5 điểm I', M, N, S, T cùng nằm trên một đường tròn.

Câu 5. (1,0 điểm) Ban đầu trên bảng có 100 số 1. Mỗi bước bạn An chọn một số a bất kỳ trên bảng sau đó xóa nó đi và thay thế bởi bốn số $\frac{a}{4}, \frac{a}{4}, \frac{a}{4}, \frac{a}{4}$. Chẳng hạn, nếu chọn số 1 thì An sẽ thay thế bởi bốn số $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$.

a) Hãy chỉ ra một cách thực hiện để sau hữu hạn bước, trên bảng không có 77 số giống nhau.

b) Tìm số nguyên dương k lớn nhất sao cho bất kể bạn An chọn số như thế nào thì sau mỗi bước, trên bảng luôn tồn tại ít nhất k số giống nhau.

Hướng dẫn giải

Giả sử ở một thời điểm trên bảng có c_n số bằng $\frac{1}{4^n}$. Lưu ý là sau mỗi thao tác thì tổng các số trên bảng không đổi nên ta luôn có: $100 = \sum c_n \frac{1}{4^n}$.

a) Ở mỗi bước chọn ra một số 1 rồi biến thành bốn số $\frac{1}{4}$. Sau 24 bước, trên bảng có 76 số 1 và 96 số $\frac{1}{4}$.

Tiếp tục, ở mỗi bước chọn số $\frac{1}{4}$ và biến thành bốn số $\frac{1}{16}$. Sau 20 bước thu được 76 số $\frac{1}{4}$ và 80 số $\frac{1}{16}$.

Lúc này trên bảng có 76 số 1; 76 số $\frac{1}{4}$ và 80 số $\frac{1}{16}$.

Cuối cùng, mỗi bước chọn số $\frac{1}{16}$ và biến thành bốn số $\frac{1}{64}$. Sau 4 bước thì thu được 76 số $\frac{1}{16}$ và 16 số $\frac{1}{64}$.

Lúc này trên bảng có 76 số 1; 76 số $\frac{1}{4}$; 76 số $\frac{1}{16}$ và 16 số $\frac{1}{64}$. Không có 77 số nào giống nhau.

b) Ta chứng minh k lớn nhất bằng 76. Thật vậy, giả sử ở thời điểm t nào đó trên bảng có các số dạng $\frac{1}{4^n}$ (với $n \leq m$).

Nếu mọi $c_n \leq 75$ thì:

$$100 = \sum c_n \cdot \frac{1}{4^n} \leq 75 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^m} \right).$$

$$\text{Đặt } S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^m}.$$

Ta có $3S = 4S - S = 4 - \frac{1}{4^m} < 4 \Rightarrow S < \frac{4}{3}$.

Suy ra $100 < 75 \cdot \frac{4}{3} = 100$ (mâu thuẫn).

Vậy tồn tại một giá trị i để $c_i \geq 76$. Suy ra $k \geq 76$.

Theo câu a, tồn tại một cách thực hiện để số lượng các số giống nhau tối đa chỉ là 76 (tức là $k < 77$).

Tóm lại, giá trị lớn nhất của k là $k_{\max} = 76$.

-----HẾT-----