

Câu 1. (3,00 điểm)

a) Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2y + xy^2 = -21 \end{cases}$. Tính giá trị các biểu thức sau:

$$M = xy; N = x^2 + y^2; P = x^3 + y^3; Q = |x - y|.$$

b) Giải phương trình $\sqrt{3x+3} + \sqrt{x^2+5} + 4x^2 + 2x = 26$.

c) Với x là số thực và $x \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = 4x^2 - 19x + 58 + 5\sqrt{x+1}.$$

Câu 2. (2,00 điểm)

a) Tìm đa thức bậc ba $P(x)$ với hệ số nguyên, biết đa thức $P(x)$ có nghiệm $x=1$, $P(-1)=-4$ và $P(1-\sqrt{2})=6-4\sqrt{2}$.

b) Có giáo mang lên lớp hai chiếc hộp, trong mỗi hộp chỉ có bi màu xanh và bi màu đỏ, mỗi hộp đựng không quá 20 viên bi. Cô gọi bạn An lên thực nghiệm, An sẽ kiểm kê số lượng và màu sắc bi trong hộp thứ nhất, rồi tính xác suất bốc được bi xanh khi bốc ngẫu nhiên 1 viên trong hộp này. Cô cũng gọi bạn Bình lên thực hiện tương tự như vậy đối với hộp thứ hai. Biết rằng hai bạn đều tính đúng và tổng xác suất tính được của hai bạn là $\frac{142}{143}$. Hỏi trong cả hai hộp có bao nhiêu viên bi xanh?

Câu 3. (1,50 điểm) Cho tam giác ABC ($AB < AC$) vuông tại A có đường phân giác AD . Gọi E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ D đến AB và AC . Gọi I là giao điểm của DE và BF , K là giao điểm của CE và DF . Chứng minh rằng:

a) $\frac{IE}{ID} = \frac{EB}{EA}$.

b) IK song song với BC .

c) AK vuông góc với BF .

Câu 4. (1,50 điểm) Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Hai đường chéo AC và BD cắt nhau ở K . Trên cung nhỏ BC lấy điểm E ($E \neq B, C$). Đường thẳng KE cắt các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABK và CDK lần lượt tại G, H ($G, H \neq K$) và cắt đường tròn (O) tại F ($F \neq E$). Chứng minh rằng:

a) Tam giác ADF đồng dạng với tam giác AEG .

b) $EG = HF$.

Câu 5. (1,00 điểm) Cho a, b, c là các số nguyên dương, trong đó a, b là hai số nguyên tố cùng nhau và $(a^2b + ab^2 + c^3)$ chia hết cho ac . Chứng minh rằng số a là lũy thừa bậc 3 của một số nguyên dương.

Câu 6. (1,00 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + ab}{b^2 + 3} + \frac{b^2 + bc}{c^2 + 3} + \frac{c^2 + ca}{a^2 + 3} \leq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{2}.$$

-----HẾT-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Trần Văn A; Số báo danh: 010252
Chữ ký của giám thị 1: [Chữ ký]; Chữ ký của giám thị 2: [Chữ ký]

Câu 1. (3,00 điểm)

a) Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2y + xy^2 = -21 \end{cases}$. Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$M = xy; N = x^2 + y^2; P = x^3 + y^3; Q = |x - y|.$$

b) Giải phương trình $\sqrt{3x+3} + \sqrt{x^2+5} + 4x^2 + 2x = 26$.

c) Với x là số thực và $x \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 4x^2 - 19x + 58 + 5\sqrt{x+1}$.

Câu 2. (2,00 điểm)

a) Tìm đa thức bậc ba $P(x)$ với hệ số nguyên, biết đa thức $P(x)$ có nghiệm $x = 1, P(-1) = -4$ và $P(1 - \sqrt{2}) = 6 - 4\sqrt{2}$.

b) Cô giáo mang lên lớp hai chiếc hộp, trong mỗi chiếc hộp có bi màu xanh và bi màu đỏ, mỗi hộp đựng không quá 20 viên bi. Cô gọi bạn An lên thực nghiệm, An sẽ kiểm kê số lượng và màu sắc bi trong hộp thứ nhất, rồi tính xác suất bốc được bi xanh khi bốc ngẫu nhiên 1 viên trong hộp này. Cô cũng gọi bạn Bình lên thực hiện tương tự như vậy đối với hộp thứ hai. Biết rằng hai bạn đều tính đúng và tổng xác suất tính được của hai bạn là $\frac{142}{143}$. Hỏi trong cả hai hộp có bao nhiêu viên bi xanh?

Câu 3. (1,50 điểm) Cho tam giác ABC ($AB < AC$) vuông tại A có đường phân giác AD . Gọi E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ D đến AB và BC . Gọi I là giao điểm của DE và BF , K là giao điểm của CE và DF . Chứng minh rằng:

a) $\frac{IE}{ID} = \frac{EB}{EA}$.

b) IK song song với BC .

c) AK vuông góc với BF .

Câu 4. (1,50 điểm) Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Hai đường chéo AC và BD cắt nhau ở K . Trên cung nhỏ BC lấy điểm E ($E \neq B, C$). Đường thẳng KE cắt các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABK và CDK lần lượt tại G, H ($G, H \neq K$) và cắt đường tròn (O) tại F ($F \neq E$). Chứng minh rằng:

a) Tam giác ADF đồng dạng với tam giác AEG .

b) $EG = HF$.

Câu 5. (1,00 điểm) Cho a, b, c là các số nguyên dương, trong đó a, b là hai số nguyên tố cùng nhau và $(a^2b + ab^2 + c^3)$ chia hết cho ac . Chứng minh rằng số a là lũy thừa bậc 3 của một số nguyên dương.

Câu 6. (1,00 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + ab}{b^2 + 3} + \frac{b^2 + bc}{c^2 + 3} + \frac{c^2 + ac}{a^2 + 3} \leq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{2}.$$

-----HẾT-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh:.....

Chữ ký của giám thị 1:.....; Chữ ký của giám thị 2:.....

Câu 1. (3,00 điểm)

a) Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2y + xy^2 = -21 \end{cases}$. Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$M = xy; N = x^2 + y^2; P = x^3 + y^3; Q = |x - y|.$$

b) Giải phương trình $\sqrt{3x+3} + \sqrt{x^2+5} + 4x^2 + 2x = 26$.

c) Với x là số thực và $x \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 4x^2 - 19x + 58 + 5\sqrt{x+1}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2y + xy^2 = -21 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x + y = 7 \\ xy(x + y) = -21 \end{cases}$, do đó $\begin{cases} x + y = 7 \\ 7xy = -21 \end{cases}$.

Suy ra $xy = -3$.

Từ đó $M = xy = -3$.

$$\text{Với } N = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 7^2 - 2 \cdot (-3) = 49 + 6 = 55.$$

$$\text{Với } P = x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 7 \cdot [55 - (-3)] = 7 \cdot 58 = 406.$$

$$\text{Với } Q = |x - y| = \sqrt{(x - y)^2} = \sqrt{(x + y)^2 - 4xy} = \sqrt{7^2 - 4 \cdot (-3)} = \sqrt{61}.$$

b) Điều kiện xác định: $x \geq -1$.

$$\text{Ta có: } \sqrt{3x+3} + \sqrt{x^2+5} + 4x^2 + 2x = 26$$

$$(\sqrt{3x+3} - 3) + (\sqrt{x^2+5} - 3) + 4x^2 + 2x - 20 = 0$$

$$\frac{3(x-2)}{\sqrt{3x+3}+3} + \frac{(x-2)(x+2)}{\sqrt{x^2+5}+3} + 2(x-2)(2x+5) = 0$$

$$(x-2) \left[\frac{3}{\sqrt{3x+3}+3} + \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} + 2(2x+5) \right] = 0$$

Kết hợp với $x \geq -1$ ta có $x = 2$ là nghiệm duy nhất.

c) Ta có: $A = 4x^2 - 19x + 58 + 5\sqrt{x+1}$

$$A = 4x^2 - 19x + 11 + (5\sqrt{x-1} - 10) + 47$$

$$A = (x-3)(4x-7) + \frac{5(x-3)}{\sqrt{x-1}+2} + 47 \geq 47.$$

Do đó, giá trị nhỏ nhất của A bằng 47, dấu “=” xảy ra khi $x = 3$.

Câu 2. (2,00 điểm)

a) Tìm đa thức bậc ba $P(x)$ với hệ số nguyên, biết đa thức $P(x)$ có nghiệm $x = 1, P(-1) = -4$ và $P(1 - \sqrt{2}) = 6 - 4\sqrt{2}$.

b) Cô giáo mang lên lớp hai chiếc hộp, trong mỗi chiếc hộp có bi màu xanh và bi màu đỏ, mỗi hộp đựng không quá 20 viên bi. Cô gọi bạn An lên thực nghiệm, An sẽ kiểm kê số lượng và màu sắc bi trong hộp thứ nhất, rồi tính xác suất bốc được bi xanh khi bốc ngẫu nhiên 1 viên trong hộp này. Cô cũng gọi bạn Bình lên thực hiện tương tự như vậy đối với hộp thứ hai. Biết rằng hai bạn đều tính đúng và tổng xác suất tính được của hai bạn là $\frac{142}{143}$. Hỏi trong cả hai hộp có bao nhiêu viên bi xanh?

Hướng dẫn giải

a) Giả sử $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \neq 0$ và a, b, c, d nguyên.

Vì $P(1) = 0, P(-1) = -4$ và $P(1 - \sqrt{2}) = 6 - 4\sqrt{2}$.

Do đó, $a + b + c + d = 0; -a + b - c + d = -4$

$$\begin{aligned} P(1 - \sqrt{2}) &= a(7 - 5\sqrt{2}) + b(3 - 2\sqrt{2}) + c(1 - \sqrt{2}) + d \\ &= (7a + 3b + c + d) - (5a + 2b + c)\sqrt{2} \end{aligned}$$

Để ý $\sqrt{2}$ là số vô tỉ nên $7a + 3b + c + d = 6$ và $5a + 2b + c = 4$.

$$\text{Từ đó, ta có hệ phương trình } \begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ -a + b - c + d = -4 \\ 7a + 3b + c + d = 6 \\ 5a + 2b + c = 4 \end{cases}$$

Do đó, giải được $a = 2, b = -3, c = 0, d = 1$.

Vì vậy $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

b) Gọi số bi trong hộp thứ nhất là n_1 , số bi xanh trong hộp thứ hai là x_1 ($n_1 \leq 20, x_1 \leq n_1$).

Gọi số bi trong hộp thứ hai là n_2 , số bi xanh trong hộp thứ hai là x_2 ($n_2 \leq 20, x_2 \leq n_2$).

Tổng xác suất bốc được bi xanh từ hai hộp là: $\frac{x_1}{n_1} + \frac{x_2}{n_2} = \frac{142}{143}$ hay $\frac{x_1 n_2 + x_2 n_1}{n_1 n_2} = \frac{142}{143}$.

Do đó, tích $n_1 n_2$ phải chia hết cho 143. Mà $143 = 11 \cdot 13$ (với 11 và 13 là hai số nguyên tố).

Vì $n_1, n_2 \leq 20$ suy ra một trong hai số n_1, n_2 phải là bội của 11 và số còn lại là bội của 13.

Do lượng bi mỗi hộp không quá 20, chỉ có thể xảy ra trường hợp: $\{n_1, n_2\} = \{11, 13\}$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $n_1 = 11, n_2 = 13$. Khi đó phương trình trở thành:

$$\frac{x_1}{11} + \frac{x_2}{13} = \frac{142}{143} \text{ suy ra } 13x_1 + 11x_2 = 142.$$

Ta tìm nghiệm nguyên của phương trình trên với điều kiện $0 \leq x_1 \leq 11$; $0 \leq x_2 \leq 13$;

Ta có $13x_1 \equiv 142 \pmod{11}$ suy ra $2x_1 \equiv 10 \pmod{11}$, được $x_1 \equiv 5 \pmod{11}$.

Vì $0 \leq x_1 \leq 11$ nên $x_1 = 5$.

$$\text{Do đó, } x_2 = \frac{142 - 13 \cdot 5}{11} = 7 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy số viên màu xanh ở hai hộp lần lượt là 5 viên và 7 viên.

Tổng số viên màu xanh trong hai hộp là $5 + 7 = 12$ (viên).

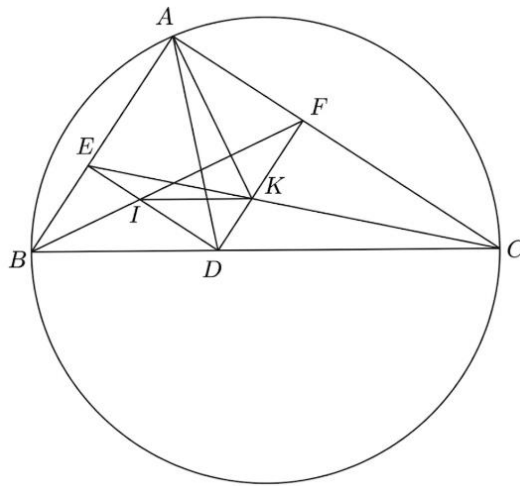
Câu 3. (1,50 điểm) Cho tam giác ABC ($AB < AC$) vuông tại A có đường phân giác AD . Gọi E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ D đến AB và BC . Gọi I là giao điểm của DE và BF , K là giao điểm của CE và DF . Chứng minh rằng:

a) $\frac{IE}{ID} = \frac{EB}{EA}.$

b) IK song song với BC .

c) AK vuông góc với BF .

Hướng dẫn giải



a) Có Tứ giác $AEDF$ là hình chữ nhật mà AD là phân giác trong EAF nên tứ giác $AEDF$ là hình vuông.

$$\text{Ta có } DE \perp AC \text{ nên } \frac{IE}{ID} = \frac{FA}{FC}.$$

$$\text{Cần chứng minh } \frac{EB}{EA} = \frac{FA}{FC} \text{ hay } EB \cdot FC = EA \cdot FA = DE \cdot DF.$$

$$\text{Suy ra } \frac{EB}{DE} = \frac{DF}{FC} \text{ hay } \tan EDB = \tan DCF \text{ (đúng do } ED \perp AC).$$

b) Ta có $\frac{FK}{KD} = \frac{EA}{EB} = \frac{FI}{IB}$ (do $DF \parallel AB; DE \parallel AC$) nên $IK \parallel CB$.

c) Ta có $\frac{CF}{AF} = \frac{CD}{BD} = \frac{CA}{BA}$ hay $\frac{AF}{BA} = \frac{CF}{CA} = \frac{KF}{AE} = \frac{FK}{AF}$ mà $BAF = AFK = 90^\circ$.

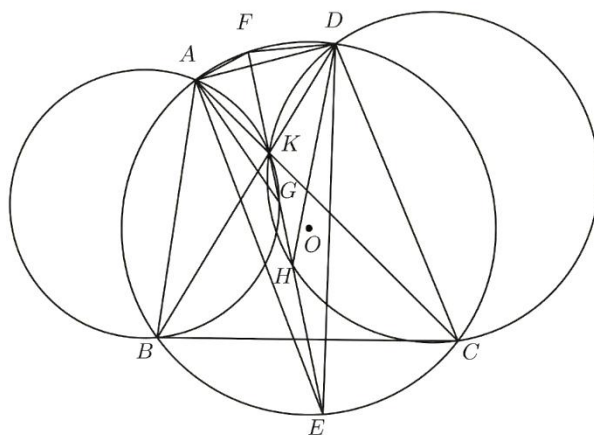
Suy ra $\triangle BAF \sim \triangle AKF$ nên $KAF = ABF = 90^\circ - AFB$ suy ra $AK \perp BF$.

Câu 4. (1,50 điểm) Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Hai đường chéo AC và BD cắt nhau ở K . Trên cung nhỏ BC lấy điểm E ($E \neq B, C$). Đường thẳng KE cắt các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABK và CDK lần lượt tại G, H ($G, H \neq K$) và cắt đường tròn (O) tại F ($F \neq E$). Chứng minh rằng:

a) Tam giác ADF đồng dạng với tam giác AEG .

b) $EG = HF$.

Hướng dẫn giải



a) Xét $\triangle ADF$ và $\triangle AEG$ có:

$$\angle ADF = \angle AEF = \angle AEG \text{ và } \angle AGE = 180^\circ - \angle AGK = 180^\circ - \angle ABK = 180^\circ - \angle ABD = \angle AFD.$$

Khi đó $\triangle ADF \sim \triangle AEG$ (g.g)

b) Ta có $\angle DHF = \angle DHK = \angle DCK = \angle DCA = \angle DEA$.

$$\text{Mà } \angle DFH = \angle DFE = \angle DAE$$

$$\text{Do đó, } \triangle DHF \sim \triangle DEA \text{ hay } \frac{HF}{AE} = \frac{DF}{DA} \text{ hay } HF = \frac{AE \cdot DF}{DA}.$$

$$\text{Mặt khác } \triangle ADF \sim \triangle AEG \text{ nên } \frac{EG}{DF} = \frac{AE}{AD} \text{ hay } EG = \frac{AE \cdot DE}{DA}.$$

Suy ra $EG = HF$.

Câu 5. (1,00 điểm) Cho a, b, c là các số nguyên dương, trong đó a, b là hai số nguyên tố cùng nhau và $(a^2b + ab^2 + c^3)$ chia hết cho ac . Chứng minh rằng số a là lũy thừa bậc 3 của một số nguyên dương.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết, ta có $a^2b + ab^2 + c^3 = k \cdot ac$ ($k \in \mathbb{Z}^+$).

Điều này dẫn tới $a^2b + ab^2 + c^3 : a$ suy ra $c^3 : a$.

$$a^2b + ab^2 + c^3 : c \text{ suy ra } ab(a+b) : c.$$

Chia cả hai vế của phương trình thiết lập cho a , ta được phương trình:

$$b(a+b) + \frac{c^3}{a} = kc \text{ suy ra } b(a+b) = kc - \frac{c^3}{a}.$$

Với số nguyên tố p và số nguyên $a \neq 0$, kí hiệu $v_p(a) = k \in \mathbb{N}$ nếu a chia hết cho p^k nhưng không chia hết cho p^{k+1} . Khi đó ta có tính chất sau:

$$v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$$

$$v_p(a-b) = \min\{v_p(a), v_p(b)\} \text{ nếu } v_p(a) \neq v_p(b).$$

Gọi p là ước nguyên tố bất kì của $a \neq 0$. Vì $(a, b) = 1$ nên ta có $p \nmid b$; $p \nmid (a+b)$ nên

$$v_p\left(kc - \frac{c^3}{a}\right) = v_p(b(a+b)) = 0.$$

Đặt $v_p(a) = \alpha \geq 1$ và $v_p(c) = \beta \geq 1$ (do $c^3 : a$ nên $3\beta \geq \alpha \geq 1$)

Ta thấy $v_p(kc) \geq v_p(c) = \beta \geq 1$.

Do đó để $v_p\left(kc - \frac{c^3}{a}\right) = 0$ mà $v_p(kc) > 0$ nên

$$v_p\left(\frac{c^3}{a}\right) = 0 \text{ suy ra } v_p(c^3) - v_p(a) = 0 \text{ suy ra } 3\beta - \alpha = 0 \text{ do đó } 3\beta = \alpha.$$

Như vậy, số mũ của mọi ước nguyên tố p bất kì của a trong phân tích thừa số nguyên tố đều là bội số của 3 ($3\beta = \alpha$), tức α là lũy thừa bậc 3 của một số nguyên dương.

Câu 6. (1,00 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + ab}{b^2 + 3} + \frac{b^2 + bc}{c^2 + 3} + \frac{c^2 + ac}{a^2 + 3} \leq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{2}.$$

Hướng dẫn giải

Thay giả thiết $ab + bc + ca = 3$ vào mẫu số ở vế trái, ta được:

$$b^2 + 3 = b^2 + ab + bc + ca = (b+a)(b+c).$$

$$\text{Khi đó, ta có: } \frac{a^2 + ab}{b^2 + 3} = \frac{a(a+b)}{(a+b)(b+c)} = \frac{a}{b+c}.$$

Biến đổi tương tự, được $VT = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$.

Ta sẽ chứng minh $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ac} + \frac{1}{2}$.

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$\sum \left(\frac{a}{b+c} - \frac{a^2}{ab+bc+ac} \right) \leq \frac{1}{2} \text{ suy ra } \sum \left(\frac{a(ab+bc+ac) - a^2(b+c)}{(b+c)(ab+bc+ac)} \right) \leq \frac{1}{2}$$

$$\sum \left(\frac{abc}{(b+c)(ab+bc+ac)} \right) \leq \frac{1}{2} \text{ suy ra } \frac{abc}{ab+bc+ac} \sum \left(\frac{1}{b+c} \right) \leq \frac{1}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM có $b+c \geq 2\sqrt{bc}$ suy ra

$$\sum \left(\frac{1}{b+c} \right) \leq \sum \frac{1}{2\sqrt{bc}} \leq \frac{\sqrt{abc}(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})}{2(ab+bc+ac)} = \frac{a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}}{2(ab+bc+ca)}$$

Ta lại có được $a\sqrt{bc} \leq \frac{a(b+c)}{2}$; $b\sqrt{ac} \leq \frac{b(a+c)}{2}$; $c\sqrt{ab} \leq \frac{c(a+b)}{2}$

Cộng theo vế ta được:

$$a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab} \leq \frac{a(b+c)}{2} + \frac{b(a+c)}{2} + \frac{c(a+b)}{2} = ab+bc+ac$$

$$\text{Do đó, } \frac{a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}}{2(ab+bc+ac)} \leq \frac{ab+bc+ac}{2(ab+bc+ac)} = \frac{1}{2}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.