

Câu 1 (2,0 điểm).

a. Rút gọn biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+5} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-4} - \frac{8\sqrt{x}-14}{x+\sqrt{x}-20}$.

b. Cho phương trình $x^2 + 2(m+5)x + m^2 + m - 2 = 0$ (m là tham số thực). Tìm tất cả giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 144$.

Câu 2 (1,0 điểm). Cho đa thức $P(x) = x^{2n} + (2x+1)^n$, với n là số nguyên dương. Biết rằng, $P(x)$ chia hết cho đa thức $x+1$. Chứng minh rằng, $P(2027) - 4$ chia hết cho 5.

Câu 3 (1,0 điểm). Có một nhóm 6 người gồm An, Bình, Cường, Duyên, Mai, Nam. Nếu người này kết bạn với người kia thì 2 người đó là bạn của nhau. Trong nhóm này, An chỉ kết bạn với Nam và Bình; Cường chỉ kết bạn với Bình và Duyên; Mai chỉ kết bạn với Nam và Duyên. Trong 3 người Bình, Nam, Duyên mỗi người là bạn với đúng 2 người khác trong nhóm 6 người trên. Trong 3 người An, Cường, Mai không có 2 người nào là bạn của nhau. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 người trong nhóm 6 người trên. Tính xác suất của biến cố X : “2 người được chọn không là bạn của nhau”.

Câu 4 (2,0 điểm).

a. Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $4a^2 + b^2 + c^2 - 9 = 5ab + 2bc + 4ca$. Chứng minh rằng, $ab+1$ và $ab+4a+2b-2c+10$ đều là các số chính phương.

b. Chứng minh rằng, không tồn tại số nguyên n để $n+2026$ và $n-2$ đều là lập phương của các số nguyên.

Câu 5 (3,0 điểm). Cho đường tròn (O) có AB là một dây cung không đi qua tâm của đường tròn. Hai tiếp tuyến của đường tròn tại các điểm A, B cắt nhau tại điểm M . Kẻ tia Mx nằm giữa hai tia MA, MO . Gọi C và D là giao điểm của tia Mx với đường tròn (O) sao cho điểm C nằm giữa hai điểm M và D . Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng CD .

a. Chứng minh rằng, năm điểm M, A, E, O, B cùng thuộc một đường tròn và EM là tia phân giác của $\widehat{AEB}$.

b. Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng AB và MO . Đường thẳng CH cắt đường tròn (O) tại điểm $F (F \neq C)$. Chứng minh rằng, $MC \cdot MD = MH \cdot MO$ và đường thẳng DF song song với đường thẳng AB .

c. Đường thẳng DF cắt các tia MA, MB tương ứng tại các điểm P, Q . Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng EP và AD ; J là giao điểm của hai đường thẳng EQ và BD . Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng IJ . Chứng minh rằng, ba điểm H, K, D thẳng hàng.

Câu 6 (1,0 điểm). Xác định tất cả các tập hợp X thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) Tập hợp X có 2026 phần tử. Các phần tử là các số thực dương. Tổng của tất cả các phần tử của tập hợp X bằng 2027.

ii) Với hai phần tử phân biệt bất kỳ a, b thuộc tập hợp X thì có ít nhất một trong hai số $|a-b|, a+b$ cũng thuộc tập hợp X .

----- HẾT -----

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1 (2,0 điểm).

a) Rút gọn biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+5} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-4} - \frac{8\sqrt{x}-14}{x+\sqrt{x}-20}$.

b) Cho phương trình $x^2 + 2(m+5)x + m^2 + m - 2 = 0$ (m là tham số thực). Tìm tất cả giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 144$.

Câu 2 (1,0 điểm). Cho đa thức $P(x) = x^{2n} + (2x+1)^n$, với n là số nguyên dương. Biết rằng, $P(x)$ chia hết cho đa thức $x+1$. Chứng minh rằng $P(2027) - 4$ chia hết cho 5.

Câu 3 (1,0 điểm). Có một nhóm 6 người gồm An, Bình, Cường, Duyên, Mai, Nam. Nếu người này kết bạn với người kia thì 2 người đó là bạn của nhau. Trong nhóm này, An chỉ kết bạn với Nam và Bình; Cường chỉ kết bạn với Bình và Duyên; Mai chỉ kết bạn với Nam và Duyên. Trong 3 người Bình, Nam, Duyên mỗi người là bạn với đúng 2 người khác trong nhóm 6 người trên. Trong 3 người An, Cường, Mai không có 2 người nào là bạn của nhau. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 người trong nhóm 6 người trên. Tính xác suất của biến cố X : "2 người được chọn không là bạn của nhau".

Câu 4 (2,0 điểm).

a) Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $4a^2 + b^2 + c^2 - 9 = 5ab + 2bc + 4ca$. Chứng minh rằng, $ab+1$ và $ab+4a+2b-2c+10$ đều là các số chính phương.

b) Chứng minh rằng, không tồn tại số nguyên n để $n+2026$ và $n-2$ đều là lập phương của các số nguyên.

Câu 5 (3,0 điểm). Cho đường tròn (O) có AB là một dây cung không đi qua tâm của đường tròn. Hai tiếp tuyến của đường tròn tại các điểm A, B cắt nhau tại điểm M . Kẻ tia Mx nằm giữa hai tia MA, MO . Gọi C và D là giao điểm của tia Mx với đường tròn (O) sao cho điểm C nằm giữa hai điểm M và D . Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng CD .

a) Chứng minh rằng, năm điểm M, A, E, O, B cùng thuộc một đường tròn và ME là tia phân giác của AEB .

b) Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng AB và MO . Đường thẳng CH cắt đường tròn (O) tại điểm F ($F \neq C$). Chứng minh rằng $MC \cdot MD = MH \cdot MO$ và đường thẳng DF song song với đường thẳng AB .

c) Đường thẳng DF cắt các tia MA, MB tương ứng tại các điểm P, Q . Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng EP và AD ; J là giao điểm của hai đường thẳng EQ và BD . Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng IJ . Chứng minh rằng, ba điểm H, K, D thẳng hàng.

Câu 6 (1,0 điểm). Xác định tất cả các tập hợp X thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) Tập hợp X có 2026 phần tử. Các phần tử là các số thực dương. Tổng của tất cả các phần tử của tập hợp X bằng 2027.

ii) Với hai phần tử phân biệt bất kỳ a, b thuộc tập hợp X thì có ít nhất một trong hai số $|a - b|, a + b$ cũng thuộc tập hợp X .

-----HẾT-----

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1 (2,0 điểm).

a) Rút gọn biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+5} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-4} - \frac{8\sqrt{x}-14}{x+\sqrt{x}-20}$.

b) Cho phương trình $x^2 + 2(m+5)x + m^2 + m - 2 = 0$ (m là tham số thực). Tìm tất cả giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 144$.

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện xác định: $x \geq 0, x \neq 4$.

Thực hiện rút gọn được $P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}$.

b) Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta > 0$.

Suy ra $9m + 27 > 0$ hay $m > -3$.

Theo định lí Viète ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(m+5) \\ x_1 x_2 = m^2 + m - 2 \end{cases}$$

Do đó $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 2m^2 + 38m + 104$

Suy ra $2m^2 + 38m - 40 = 0$ hay $2(m-1)(m+20) = 0$.

Kết hợp $m > -3$ ta có $m = 1$ là giá trị duy nhất cần tìm.

Câu 2 (1,0 điểm). Cho đa thức $P(x) = x^{2n} + (2x+1)^n$, với n là số nguyên dương. Biết rằng, $P(x)$ chia hết cho đa thức $x+1$. Chứng minh rằng $P(2027) - 4$ chia hết cho 5.

Hướng dẫn giải

Ta có: $P(-1) = 0$ nên $1 + (-1)^n = 0$ với n lẻ.

Cùng có $P(2027) - 4 = 2027^{2n} + 4055^n - 4 \equiv 2^{2n} - 4 \equiv (-1)^n - 4 \equiv -5 \equiv 0 \pmod{5}$.

Do đó $P(2027) - 4$ chia hết cho 5.

Câu 3 (1,0 điểm). Có một nhóm 6 người gồm An, Bình, Cường, Duyên, Mai, Nam. Nếu người này kết bạn với người kia thì 2 người đó là bạn của nhau. Trong nhóm này, An chỉ kết bạn với Nam và Bình; Cường chỉ kết bạn với Bình và Duyên; Mai chỉ kết bạn với Nam và Duyên. Trong 3 người Bình, Nam, Duyên mỗi người là bạn với đúng 2 người khác trong nhóm 6 người trên. Trong 3 người

An, Cường, Mai không có 2 người nào là bạn của nhau. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 người trong nhóm 6 người trên. Tính xác suất của biến cố X : "2 người được chọn không là bạn của nhau".

Hướng dẫn giải

Ta gọi kí hiệu tên viết tắt đại diện của các bạn An, Bình, Cường, Duyên, Mai, Nam lần lượt là A, B, C, D, M, N .

Số phần tử không gian mẫu là 15.

Ta kí hiệu XY để chỉ hai bạn X và Y có thể quen nhau.

Ta có các cặp bạn bè theo giả thiết $AN; AB; CB; CD; MN; MD$. (*)

Từ giả thiết, ta cũng có: Trong ba người Bình, Nam, Duyên, mỗi người là bạn với đúng hai người khác trong nhóm 6 người.

Ta có: $BA; BC; NM; NA; DC; DM$. Nên ta có: Bình, Nam, Duyên đều có hai bạn khác trong nhóm sáu người.

Ta xét giả thiết cuối: An, Mai, Cường không có hai người nào là bạn của nhau tức là không tồn tại AM, AC, MC .

Vậy tức là 6 cặp bạn bè ở (*) đều thỏa mãn đề bài.

Do đó, có sáu cặp bạn bè từ 6 người trong nhóm.

Vậy ta có xác suất của biến cố X : "2 người được chọn không là bạn của nhau" là:

$$\frac{15-6}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

Câu 4 (2,0 điểm).

a) Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $4a^2 + b^2 + c^2 - 9 = 5ab + 2bc + 4ca$. Chứng minh rằng, $ab+1$ và $ab+4a+2b-2c+10$ đều là các số chính phương.

b) Chứng minh rằng, không tồn tại số nguyên n để $n+2026$ và $n-2$ đều là lập phương của các số nguyên.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $4a^2 + b^2 + c^2 - 9 = 5ab + 2bc + 4ca$

$$4a^2 + b^2 + c^2 + 4ab - 4ac - 2bc = 9ab + 9$$

$$(2a + b - c)^2 = 9(ab + 1)$$

Vì thế $9(ab+1)$ là số chính phương hay $ab+1$ là số chính phương.

$$\text{Mặt khác } A = ab + 4a + 2b - 2c + 10 = (ab + 1) + 2(2a + b - c) + 9$$

Nếu $2a + b - c = 3\sqrt{ab+1}$ thì $A = (ab+1) + 6\sqrt{ab+1} + 9 = (\sqrt{ab+1} + 3)^2$ là số chính phương.

Nếu $2a + b - c = -3\sqrt{ab+1}$ thì $A = (ab+1) - 6\sqrt{ab+1} + 9 = (\sqrt{ab+1} - 3)^2$ là số chính phương.

b) Giả sử $n-2$ và $n+2026$ đều là lập phương đúng nên đồng thời $n-2 \equiv 0,1,8 \pmod{9}$ và $n+2026 \pmod{9}$

Từ đó suy ra đồng thời $n \equiv 1,2,3 \pmod{9}$ và $n \equiv 0,7,8 \pmod{9}$ vô lí.

Do đó, không tồn tại số nguyên n thỏa mãn yêu cầu bài toán.

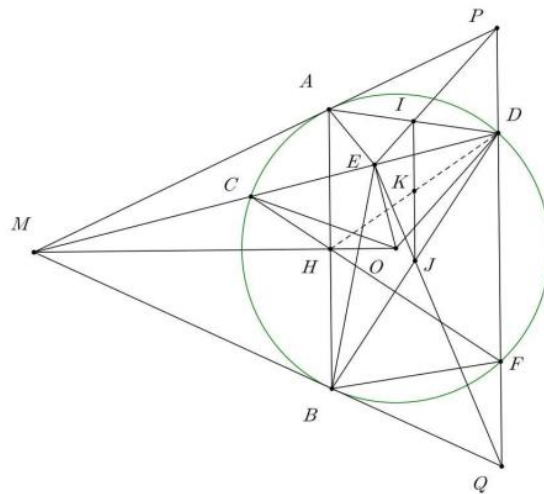
Câu 5 (3,0 điểm). Cho đường tròn (O) có AB là một dây cung không đi qua tâm của đường tròn. Hai tiếp tuyến của đường tròn tại các điểm A, B cắt nhau tại điểm M . Kẻ tia Mx nằm giữa hai tia MA, MO . Gọi C và D là giao điểm của tia Mx với đường tròn (O) sao cho điểm C nằm giữa hai điểm M và D . Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng CD .

a) Chứng minh rằng, năm điểm M, A, E, O, B cùng thuộc một đường tròn và ME là tia phân giác của AEB .

b) Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng AB và MO . Đường thẳng CH cắt đường tròn (O) tại điểm F ($F \neq C$). Chứng minh rằng $MC \cdot MD = MH \cdot MO$ và đường thẳng DF song song với đường thẳng AB .

c) Đường thẳng DF cắt các tia MA, MB tương ứng tại các điểm P, Q . Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng EP và AD ; J là giao điểm của hai đường thẳng EQ và BD . Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng IJ . Chứng minh rằng, ba điểm H, K, D thẳng hàng.

Hướng dẫn giải



a) Năm điểm M, A, E, O, B cùng nằm trên đường tròn đường kính MO nên:

$\angle AEM = \angle AOM = \angle BOM = \angle MEB$ nên EM là phân giác $\angle AEB$.

b) Áp dụng hệ thức lượng ta có: $MC \cdot MD = MA^2 = MH \cdot MO$ nên tứ giác $CHOD$ nội tiếp.

Suy ra $\angle CHM = \angle CDO = \angle DCO = \angle DHO$ suy ra $90^\circ - \angle CHM = 90^\circ - \angle DHO$.

Suy ra $CHA = DHA = \frac{CHD}{2} = \frac{COD}{2} = CFD$, do đó $CHA = CFD$ suy ra $AH \parallel DF$ suy ra $DF \parallel AB$.

c) Áp dụng định lí Menelaus cho $\triangle MAD$ với P, I, E thẳng hàng được:

$$\frac{PM}{PA} \cdot \frac{IA}{ID} \cdot \frac{ED}{EM} = 1 \text{ suy ra } \frac{ID}{IA} = \frac{PM}{PA} \cdot \frac{ED}{EM} \quad (1)$$

Áp dụng định lí Menelaus cho $\triangle MBD$ với E, J, Q thẳng hàng ta được:

$$\frac{QM}{QB} \cdot \frac{JB}{JD} \cdot \frac{ED}{EM} = 1 \text{ suy ra } \frac{JD}{JB} = \frac{QM}{QB} \cdot \frac{ED}{EM} \quad (2)$$

Mà $\frac{QM}{QB} = \frac{PM}{MA}$ do $PQ \parallel AB$ nên từ (1) và (2) suy ra $\frac{ID}{IA} = \frac{JD}{JB}$ suy ra $IJ \parallel AB$.

Suy ra ba điểm H, K, D thẳng hàng theo bổ đề hình thang.

Câu 6 (1,0 điểm). Xác định tất cả các tập hợp X thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) Tập hợp X có 2026 phần tử. Các phần tử là các số thực dương. Tổng của tất cả các phần tử của tập hợp X bằng 2027.

ii) Với hai phần tử phân biệt bất kỳ a, b thuộc tập hợp X thì có ít nhất một trong hai số $|a - b|, a + b$ cũng thuộc tập hợp X .

Hướng dẫn giải

i) Giả sử tập hợp X gồm 2026 phần tử thực dương, sắp xếp theo thứ tự tăng dần:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2026}\} \text{ với } 0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{2026}.$$

Ta có $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2026} = 2027$.

Nhận xét 1: $x_i + x_{2026-i} = x_{2026}$ với mọi $i = \overline{1, 2025}$.

Chứng minh:

Thật vậy, vì $x_i + x_{2026} > x_{2026}$ nên $x_i + x_{2026} \notin X$ hay $x_{2026} - x_i \in X \quad \forall i = \overline{1, 2025}$.

Chú ý rằng $0 < x_{2026} - x_{2025} < x_{2026} - x_{2024} < \dots < x_{2026} - x_1 < x_{2026}$ và 2025 phần tử này đều thuộc X .

Do đó, $x_i + x_{2026-i} = x_{2026} \quad \forall i = \overline{1, 2025}$

Nhận xét 2: $x_k = k \cdot x_1$ với mọi $k = \overline{1, 2026}$.

Chứng minh:

Thật vậy, xét $x_{2024} + x_{2025} = 2x_{2026} - (x_1 + x_2) > 2x_{2026} - (x_1 + x_{2025}) = x_{2026}$.

Vì vậy $x_{2024} + x_{2025} \notin X$ hay $x_{2025} - x_{2024} \in X$ hay $(x_{2026} - x_1) + (x_{2026} - x_2) \in X$.

Suy ra $x_2 - x_1 \in X$ mà $x_2 - x_1 < x_2$ nên $x_2 - x_1 = x_1$ suy ra $x_2 = 2x_1$.

Từ $x_2 = 2x_1$, kết hợp với nhận xét 1 suy ra $x_k = k \cdot x_1$ với mọi $k = \overline{1, 2026}$.

Vì thế ta có được: $2027 = \sum_{k=1}^{2026} x_k = \sum_{k=1}^{2026} (k \cdot x_1) = x_1 \cdot \frac{2026 \cdot 2027}{2} = 1013 \cdot 2027 \cdot x_1.$

Suy ra $x_1 = \frac{1}{1013}$

Vậy tập hợp X cần tìm là $X = \left\{ \frac{1}{1013}; \frac{2}{1013};; \frac{2026}{1013} \right\}.$