

Câu 1. (2,0 điểm)

1. Một túi đựng các quả bóng cùng kích thước, cùng khối lượng, đồng chất; trong đó có 3 quả màu xanh, 3 quả màu đỏ, 4 quả màu vàng; các quả bóng cùng màu thì khác nhau. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 4 quả bóng từ túi đó. Tính xác suất để 4 quả bóng được lấy ra có đúng 2 màu.

2. Ở một cửa hàng chuyên kinh doanh sản phẩm A, mỗi kilogram sản phẩm A có giá nhập về là 120 nghìn đồng và giá bán ra niêm yết là 200 nghìn đồng. Tại thời điểm hiện nay, mỗi ngày cửa hàng đang bán được 240 kg sản phẩm A. Để tăng số lượng sản phẩm bán ra, chủ cửa hàng muốn chạy chương trình khuyến mãi giảm giá bán. Biết rằng nếu giảm mỗi 1% của giá bán niêm yết ban đầu thì khối lượng hàng bán được tăng thêm 20 kg. Hỏi chủ cửa hàng đó cần giảm giá bao nhiêu phần trăm của giá bán niêm yết ban đầu để thu được lợi nhuận lớn nhất trong một ngày?

Câu 2. (2,0 điểm)

1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 2x - 8y - 3 = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 2xy + 6x - 18y + 9 = 0 \end{cases}$$

2. Cho đa thức $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Biết rằng $P(1) = 1$, $P(2) = 4$, $P(3) = 9$. Tính giá trị của biểu thức $S = P(4) + P(0)$.

Câu 3. (3,0 điểm)

Cho nửa đường tròn (O) , đường kính AB . Gọi C là điểm cố định thuộc đoạn thẳng OB (C khác O và B). Đường thẳng d vuông góc với AB tại điểm C cắt nửa đường tròn (O) tại điểm M . Trên cung nhỏ $\widehat{MB}$ lấy điểm N bất kỳ (N khác M và B), tia AN cắt đường thẳng d tại điểm F , tia BN cắt đường thẳng d tại điểm E . Đường thẳng AE cắt nửa đường tròn (O) tại điểm D (D khác A).

1. Chứng minh $EN \cdot AB = EA \cdot ND$.

2. Chứng minh F là tâm đường tròn nội tiếp tam giác CDN .

3. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF . Chứng minh rằng điểm I luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi điểm N thay đổi.

Câu 4. (1,0 điểm)

Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = abc$. Tìm giá trị lớn

nhất của biểu thức:
$$P = \sqrt{\frac{1}{ab} : \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{ab}\right)} + \sqrt{\frac{1}{bc} : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{bc}\right)} + \sqrt{\frac{1}{ca} : \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{ca}\right)}.$$

Câu 5. (2,0 điểm)

1. Cho x, y, z là các số nguyên dương thỏa mãn $x - y$ là số nguyên tố và $3z^2 = xy + yz + zx$. Chứng minh rằng $8z + 1$ là số chính phương.

2. Cho tập hợp $X = \{1; \sqrt{2}; \sqrt{3}; \dots; \sqrt{2027}\}$. Chứng minh rằng trong 92 số khác nhau bất kỳ được lấy ra từ tập hợp X luôn tồn tại hai số x và y sao cho $|x - y| < \frac{1}{2}$.

----- HẾT -----

(Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề

(Đề thi gồm: 02 trang)

Câu 1. (2,0 điểm)

1. Một túi đựng các quả bóng cùng kích thước, cùng khối lượng, đồng chất; trong đó có 3 quả màu xanh, 3 quả màu đỏ, 4 quả màu vàng; các quả bóng cùng màu thì khác nhau. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 4 quả bóng từ túi đó. Tính xác suất để 4 quả bóng được lấy ra có đúng 2 màu.

2. Ở một cửa hàng chuyên kinh doanh sản phẩm A, mỗi kilogram sản phẩm A có giá nhập về là 120 nghìn đồng và giá bán ra niêm yết là 200 nghìn đồng. Tại thời điểm hiện nay, mỗi ngày cửa hàng đang bán được 240 kg sản phẩm A. Để tăng số lượng sản phẩm bán ra, chủ cửa hàng muốn chạy chương trình khuyến mãi giảm giá bán. Biết rằng nếu giảm mỗi 1% của giá bán niêm yết ban đầu thì khối lượng hàng bán được tăng thêm 20 kg. Hỏi chủ cửa hàng đó cần giảm giá bao nhiêu phần trăm của giá bán niêm yết ban đầu để thu được lợi nhuận lớn nhất trong một ngày?

Câu 2. (2,0 điểm)

1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 2x - 8y - 3 = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 2xy + 6x - 18y + 9 = 0 \end{cases}.$$

2. Cho đa thức $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Biết rằng $P(1) = 1$, $P(2) = 4$, $P(3) = 9$. Tính giá trị của biểu thức $S = P(4) + P(0)$.

Câu 3. (3,0 điểm)

Cho nửa đường tròn (O) , đường kính AB . Gọi C là điểm cố định thuộc đoạn thẳng OB (C khác O và B). Đường thẳng d vuông góc với AB tại điểm C cắt nửa đường tròn (O) tại điểm M . Trên cung nhỏ MB lấy điểm N bất kỳ (N khác M và B), tia AN cắt đường thẳng d tại điểm F , tia BN cắt đường thẳng d tại điểm E . Đường thẳng AE cắt nửa đường tròn (O) tại điểm D (D khác A).

1. Chứng minh $EN \cdot AB = EA \cdot ND$.

2. Chứng minh F là tâm đường tròn nội tiếp tam giác CDN .

3. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF . Chứng minh điểm I luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi điểm N thay đổi.

Câu 4. (1,0 điểm)

Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ac = abc$. Tìm giá trị lớn nhất của

biểu thức $P = \sqrt{\frac{1}{ab} : \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{ab}\right)} + \sqrt{\frac{1}{bc} : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{bc}\right)} + \sqrt{\frac{1}{ac} : \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{ac}\right)}.$

Câu 5. (2,0 điểm)

1. Cho x, y, z là các số nguyên dương thỏa mãn $x - y$ là số nguyên tố và $3z^2 = xy + yz + zx$.

Chứng minh rằng $8z + 1$ là số chính phương.

2. Cho tập hợp $X = \{1; \sqrt{2}; \sqrt{3}; \dots; \sqrt{2027}\}$. Chứng minh rằng trong 92 số khác nhau bất kỳ

được lấy ra từ tập hợp X luôn tồn tại hai số x và y sao cho $|x - y| < \frac{1}{2}$.

-----HẾT-----

(Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề

(Đề thi gồm: 02 trang)

Câu 1. (2,0 điểm)

1. Một túi đựng các quả bóng cùng kích thước, cùng khối lượng, đồng chất; trong đó có 3 quả màu xanh, 3 quả màu đỏ, 4 quả màu vàng; các quả bóng cùng màu thì khác nhau. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 4 quả bóng từ túi đó. Tính xác suất để 4 quả bóng được lấy ra có đúng 2 màu.

2. Ở một cửa hàng chuyên kinh doanh sản phẩm A, mỗi kilogram sản phẩm A có giá nhập về là 120 nghìn đồng và giá bán ra niêm yết là 200 nghìn đồng. Tại thời điểm hiện nay, mỗi ngày cửa hàng đang bán được 240 kg sản phẩm A. Để tăng số lượng sản phẩm bán ra, chủ cửa hàng muốn chạy chương trình khuyến mãi giảm giá bán. Biết rằng nếu giảm mỗi 1% của giá bán niêm yết ban đầu thì khối lượng hàng bán được tăng thêm 20 kg. Hỏi chủ cửa hàng đó cần giảm giá bao nhiêu phần trăm của giá bán niêm yết ban đầu để thu được lợi nhuận lớn nhất trong một ngày?

Hướng dẫn giải

1. Tổng số quả bóng trong túi là $3 + 3 + 4 = 10$ (quả).

Số cách chọn ra 4 quả bóng từ 10 quả bóng là $n(\Omega) = C_{10}^4 = 210$ (cách)

Gọi biến cố E : “4 quả bóng lấy ra có đúng 2 màu”. Các trường hợp có thể xảy ra là:

TH1: 4 quả bóng được lấy ra có đúng hai màu xanh và đỏ.

Số cách chọn 4 quả bóng từ nhóm 6 quả (xanh và đỏ) là $C_6^4 = 15$ cách.

Do số lượng bóng mỗi màu xanh đỏ chỉ có tối đa là 3 quả nên không xảy ra trường hợp cả 4 quả cùng một màu.

Vậy số cách chọn đúng 2 quả màu xanh và đỏ là 15 cách.

TH2: 4 quả bóng lấy ra có đúng hai màu xanh và vàng.

Số cách chọn 4 quả bóng từ nhóm 7 quả (xanh và vàng) là $C_7^4 = 35$ cách.

Trong các cách chọn này, có trường hợp cả 4 quả được chọn đều có màu vàng (vì có 4 quả bóng màu vàng), số cách chọn này là 1 cách và không có trường hợp cả 4 quả màu xanh.

Vậy số cách chọn đúng 2 màu xanh và vàng là: $35 - 1 = 34$ (cách)

Vậy số cách chọn đúng 2 màu xanh và vàng là 34 cách.

TH3: 4 quả bóng lấy ra có đúng hai màu đỏ và vàng.

Tương tự trường hợp 2, số cách chọn đúng hai màu đỏ và vàng là: $35 - 1 = 34$ (cách).

Tổng số kết quả thuận lợi cho biến cố E là: $n(E) = 15 + 34 + 34 = 83$ (cách)

Xác suất để 4 quả bóng lấy ra có đúng hai màu là: $P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{83}{210}$.

2. Gọi $x\%$ là tỉ lệ phần trăm giảm giá bán so với giá niêm yết ban đầu ($x \geq 0$).

Giá bán niêm yết ban đầu là 200 nghìn đồng/kg.

Khi giảm $x\%$ giá bán của 1 kg sản phẩm A là: $200 - 200 \cdot \frac{x}{100} = 200 - 2x$ (nghìn đồng)

Khối lượng sản phẩm bán ra tương ứng trong một ngày tăng thêm $20x$ kg. do đó, tổng khối lượng sản phẩm bán ra trong một ngày là: $240 + 20x$ (kg).

Lợi nhuận thu được trên mỗi kilogram sản phẩm bán ra là: $(200 - 2x) - 120 = 80 - 2x$ (nghìn đồng).

Để việc kinh doanh có lãi thì ta phải có $80 - 2x > 0$ hay $x < 40$.

Tổng lợi nhuận thu được trong một ngày là:

$$L(x) = (80 - 2x)(240 + 20x) = 40(40 - x)(12 + x) \text{ (nghìn đồng)}$$

$$\text{Ta có: } (40 - x)(12 + x) \leq \left[\frac{(40 - x) + (12 + x)}{2} \right]^2 = \left(\frac{52}{2} \right)^2 = 676.$$

$$\text{Do đó, } L(x) \leq 40 \cdot 676 = 27\,040 \text{ (nghìn đồng)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(40 - x) = (12 + x)$ suy ra $x = 14$ (thỏa mãn).

Vậy để thu được lợi nhuận lớn nhất trong một ngày, chủ cửa hàng cần giảm giá 14% so với giá bán niêm yết ban đầu.

Câu 2. (2,0 điểm)

1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 2x - 8y - 3 = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 2xy + 6x - 18y + 9 = 0 \end{cases}.$$

2. Cho đa thức $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Biết rằng $P(1) = 1$,

$P(2) = 4, P(3) = 9$. Tính giá trị của biểu thức $S = P(4) + P(0)$.

Hướng dẫn giải

1. Ta có:
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 2x - 8y - 3 = 0 & (1) \\ x^2 + 4y^2 - 2xy + 6x - 18y + 9 = 0 & (2) \end{cases}.$$

Lấy vế theo vế phương trình (2) trừ đi phương trình (1) của hệ được:

$$2y^2 - 2xy + 4x - 10x + 12 = 0$$

$$y^2 - 5y + 6 - xy + 2x = 0$$

$$(y - 3)(y - 2) - x(y - 2) = 0$$

$$(y - 2)(y - 3 - x) = 0.$$

Suy ra $y = 2$ hoặc $x = y - 3$.

TH1: Nếu $y = 2$ thay vào phương trình (1) được $x^2 + 2x - 11 = 0$.

Giải được $x = -1 \pm 2\sqrt{3}$.

TH2: Nếu $x = y - 3$ thì thay vào phương trình (1) có:

$$(y-3)^2 + 2y^2 + 2(y-3) - 8y - 3 = 0$$

$$3y^2 - 12y = 0, \text{ do đó } y = 0 \text{ hoặc } y = 4.$$

Với $y = 0$ thì $x = 3$.

Với $y = 4$ thì $x = 1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có tập nghiệm là:

$$S = \{(1; 4); (-3; 0); (-1 + 2\sqrt{3}; 2); (-1 - 2\sqrt{3}; 2)\}$$

b) Xét $Q(x) = P(x) - x^2$ thì $Q(x)$ cũng là đa thức bậc 4.

Ta có: $Q(1) = Q(2) = Q(3) = 0$, do đó đa thức $Q(x)$ nhận 1, 2, 3, làm nghiệm.

Đa thức bậc 4 này được viết dưới dạng:

$$Q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-k) \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\text{Suy ra } P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-k) + x^2$$

$$P(4) = (4-1)(4-2)(4-3)(4-k) + 4^2 = 6(4-k) + 16 = 40 - 6k$$

$$P(0) = (0-1)(0-2)(0-3)(0-k) + 0^2 = 6k$$

$$\text{Từ đây, ta có: } S = P(4) + P(0) = (40 - 6k) + 6k = 40.$$

Vậy $S = 40$.

Câu 3. (3,0 điểm)

Cho nửa đường tròn (O) , đường kính AB . Gọi C là điểm cố định thuộc đoạn thẳng OB (C khác O và B). Đường thẳng d vuông góc với AB tại điểm C cắt nửa đường tròn (O) tại điểm M . Trên cung nhỏ MB lấy điểm N bất kỳ (N khác M và B), tia AN cắt đường thẳng d tại điểm F , tia BN cắt đường thẳng d tại điểm E . Đường thẳng AE cắt nửa đường tròn (O) tại điểm D (D khác A).

1. Chứng minh $EN \cdot AB = EA \cdot ND$.

2. Chứng minh F là tâm đường tròn nội tiếp tam giác CDN .

3. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF . Chứng minh điểm I luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi điểm N thay đổi.

Hướng dẫn giải

Khi đó $P = \sqrt{\frac{xy}{z+zy}} + \sqrt{\frac{yz}{z+yz}} + \sqrt{\frac{xz}{y+zx}}$.

Ta có:
$$\sqrt{\frac{xy}{(x+z)(y+z)}} = \sqrt{\frac{x}{x+z} \cdot \frac{y}{y+z}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+z} + \frac{y}{y+z} \right)$$

Tương tự cộng lại ta có $P \leq \frac{3}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $P = \frac{3}{2}$, dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = 3$.

Câu 5. (2,0 điểm)

1. Cho x, y, z là các số nguyên dương thỏa mãn $x - y$ là số nguyên tố và $3z^2 = xy + yz + zx$.

Chứng minh rằng $8z + 1$ là số chính phương.

2. Cho tập hợp $X = \{1; \sqrt{2}; \sqrt{3}; \dots; \sqrt{2027}\}$. Chứng minh rằng trong 92 số khác nhau bất kỳ

được lấy ra từ tập hợp X luôn tồn tại hai số x và y sao cho $|x - y| < \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

1. Đặt $x - y = p$, với p là số nguyên tố ($p \geq 2$). Từ đó suy ra $x = y + p$.

Thay $x = y + p$ vào đẳng thức đã cho của đề bài:

$$3z^2 = (y + p)y + yz + z(y + p)$$

$$3z^2 = y^2 + py + 2yz + pz$$

$$y^2 + (2z + p)y + (pz - 3z^2) = 0$$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn y tham số p, z .

Vì y là số nguyên dương nên biệt thức Δ của phương trình bậc hai theo y phải là một số chính phương. Ta có: $\Delta = (2z + p)^2 - 4(pz - 3z^2) = 16z^2 + p^2$.

Đặt $16z^2 + p^2 = k^2$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ ($k > 4z$)

$$k^2 - 16z^2 = p^2 \text{ suy ra } (k - 4z)(k + 4z) = p^2$$

Vì p là số nguyên tố nên các ước nguyên dương của p^2 chỉ có thể là $1, p, p^2$.

Đồng thời do $z > 0$ suy ra $k - 4z < k + 4z$. Do đó, ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} k - 4z = 1 \\ k + 4z = p^2 \end{cases}$$

Lấy phương trình thứ hai trừ đi phương trình thứ nhất về theo k , ta thu được:

$$(k + 4z) - (k - 4z) = p^2 - 1$$

$$8z = p^2 - 1$$

$$8z + 1 = p^2.$$

Vì p là số nguyên tố nên hiển nhiên p là một số nguyên dương, do đó $8z+1=p^2$ là một số chính phương (đpcm).

2. Để ý $45 < \sqrt{2027} < 45,5$. Hơn thế nữa $1 \leq x < 45,5$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta chia $[1; 45,5)$ thành 89 tập

$$I_1 = [1; 1,5); I_2 = [1,5; 2); I_3 = [2; 2,5); \dots; I_{89} = [45; 45,5).$$

Khi lấy ra 92 số từ số X , vì có 89 tập nên có ít nhất hai số cùng thuộc vào 1 tập.

Giả sử x và y cùng thuộc vào tập I_t nào đó với $t \in \{1, 2, \dots, 98\}$.

Vì x và y cùng thuộc I_t nên $|x-y| < \frac{1}{2}$, đpcm.