

Câu I. (2,0 điểm)

1) Một hộp chứa 4 viên bi có cùng kích thước và khối lượng như nhau gồm: bi màu xanh, bi màu đỏ, bi màu tím và bi màu vàng. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi trong hộp. Tính xác suất của biến cố A: “Lấy được 2 viên bi trong đó có viên bi màu xanh”.

2) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $2a^2 + 2b^2 + c^2 - 2ac - 2bc = 0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{a}{2a+1} + \frac{b}{2b+1} + \frac{1}{c+1}$$

Câu II. (2,0 điểm)

1) Với a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $a^3 - b^3$ là số nguyên tố. Chứng minh $a^3 - b^3 + 2027$ chia hết cho 6.

2) Tìm tất cả cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $3^x - 1 = 2 \cdot 13^y$.

Câu III. (2,0 điểm)

1) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $ab = 6c^2$ và $\frac{a^3 + b^3 + 27c^3}{2}$ là số nguyên tố.

2) Với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = \frac{a^2}{bc + 2a + 3} + \frac{b^2}{ca + 2b + 3} + \frac{c^2}{ab + 2c + 3}.$$

Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Đường thẳng MO cắt đường tròn (O) tại hai điểm E, F ($ME < MF$). Kẻ đường thẳng qua E vuông góc với đường thẳng AC tại điểm D . Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và S là trung điểm của đoạn thẳng HE .

1) Chứng minh tam giác BAF đồng dạng với tam giác MDC .

2) Đường thẳng AH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai Q . Đường thẳng QF cắt đường thẳng BC tại điểm T . Chứng minh điểm S thuộc đường thẳng MD và $TSO = 90^\circ$.

3) Đường thẳng qua S vuông góc với đường thẳng BS cắt đường thẳng AC tại điểm P . Chứng minh $PA = PF$.

Câu V. (1,0 điểm) Với mỗi số nguyên dương n ($n \leq 99$), xét 100 số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

i) $1 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{100}$.

ii) Với mọi $1 \leq j < i \leq 100$ thì $a_i - a_j \neq n$.

1) Khi $n = 2$, chứng minh $a_3 - a_1 \geq 4$.

2) Tìm tất cả giá trị của n để a_{100} nhỏ nhất.

-----HẾT-----

Câu I. (2,0 điểm)

1) Một hộp chứa 4 viên bi có cùng kích thước và khối lượng như nhau gồm: bi màu xanh, bi màu đỏ, bi màu tím và bi màu vàng. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi trong hộp. Tính xác suất của biến cố A: “Lấy được 2 viên bi trong đó có viên bi màu xanh”.

2) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $2a^2 + 2b^2 + c^2 - 2ac - 2bc = 0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{a}{2a+1} + \frac{b}{2b+1} + \frac{1}{c+1}$$

Hướng dẫn giải

1) Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi trong 4 viên bi, số phần tử của không gian mẫu là 6.

Liệt kê các kết quả thuận lợi cho biến cố A: "có viên bi màu xanh".

Các cặp gồm viên bi màu xanh và một viên bi khác là: {xanh, đỏ}, {xanh, tím}, {xanh, vàng}. Có 3 kết quả thuận lợi.

Vậy xác suất của biến cố A là: $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

2) Vì $2a^2 + 2b^2 + c^2 - 2ac - 2bc = 0$ nên $4a^2 + 4b^2 + 2c^2 - 4ac - 4bc = 0$.

Từ đây biến đổi thành $(2a - c)^2 + (2b - c)^2 = 0$. Dẫn đến $2a = 2b = c$.

Khi đó:

$$P = \frac{a}{c+1} + \frac{b}{c+1} + \frac{1}{c+1} = \frac{a+b+1}{c+1} = \frac{\frac{c}{2} + \frac{c}{2} + 1}{c+1} = \frac{c+1}{c+1} = 1$$

Vậy $P = 1$.

Câu II. (2,0 điểm)

1) Với a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $a^3 - b^3$ là số nguyên tố. Chứng minh $a^3 - b^3 + 2027$ chia hết cho 6.

2) Tìm tất cả cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $3^x - 1 = 2 \cdot 13^y$.

Hướng dẫn giải

1) Ta có $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Vì $a, b \in \mathbb{Z}^+$ nên $a, b \geq 1$, do đó $a^2 + ab + b^2 \geq 3$, suy ra $a - b = 1$ hay $a = b + 1$.

Khi đó $a^3 - b^3 + 2027 = 3b^2 + 3b + 2028 = 3b(b+1) + 2028$ chia hết cho 2 và 3.

Mà $(2, 3) = 1$ nên $a^3 - b^3 + 2027$ chia hết cho 6.

2) Từ đề bài suy ra $3^x \equiv 1 \pmod{13}$ nên x chia hết cho 3, đặt $x = 3k$ ($k \in \mathbb{Z}^+$).

Khi đó bài toán trở thành:

$$3^{3k} - 1 = (3^k - 1)(3^{2k} + 3^k + 1) = 2 \cdot 13^y$$

Đặt $\gcd(3^k - 1, 3^{2k} + 3^k + 1) = d$ thì $3^k - 1 \vdots d$ và $3^{2k} + 3^k + 1 \vdots d$.

Mà $3^k - 1$ không chia hết cho 3 nên $d = 1$.

Lại có $3^{2k} + 3^k + 1$ là số lẻ nên $3^k - 1 = 2$, suy ra $k = 1$, khi đó $x = 3; y = 1$.

Thử lại $x = 3; y = 1$ thỏa mãn. Vậy $(x; y) = (3; 1)$.

Câu III. (2,0 điểm)

1) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $ab = 6c^2$ và $\frac{a^3 + b^3 + 27c^3}{2}$ là số nguyên tố.

2) Với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = \frac{a^2}{bc + 2a + 3} + \frac{b^2}{ca + 2b + 3} + \frac{c^2}{ab + 2c + 3}.$$

Hướng dẫn giải

1) Ta có $ab = 6c^2$ nên $9abc = 54c^3$ do đó:

$$\frac{a^3 + b^3 + 27c^3}{2} = \frac{a^3 + b^3 - 27c^3 + 9abc}{2} = \frac{(a + b - 3c)(a^2 + b^2 + 9c^2 - ab + 3ac + 3bc)}{2}$$

Đến đây xét với số nguyên tố p thì:

$$(a + b - 3c)(a^2 + b^2 + 9c^2 - ab + 3ac + 3bc) = 2p$$

Lại có $a^2 + b^2 - ab + 9c^2 + 3ac + 3bc = (a - b)^2 + ab + 9c^2 + 3ac + 3bc$, mà $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ nên

$(a - b)^2 + ab + 9c^2 + 3ac + 3bc \geq 16$, từ đó ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1. $a + b - 3c = 1$ thì $a + b = 3c + 1$ và $ab = 6c^2$, khi đó a, b là nghiệm của phương trình ẩn t :

$$t^2 - (3c + 1)t + 6c^2 = 0$$

Ta có $\Delta_t = (3c + 1)^2 - 24c^2 < 0$ khi $c \geq 1$ nên phương trình này vô nghiệm.

Trường hợp 2. $a + b - 3c = 2$ thì $a + b = 3c + 2$ và $ab = 6c^2$, khi đó a, b là nghiệm của phương trình ẩn t :

$$t^2 - (3c + 2)t + 6c^2 = 0$$

Ta có $\Delta_t = (3c + 2)^2 - 24c^2 \geq 0$ khi $-1 < c < 2$ mà $c \in \mathbb{Z}^+$ nên $c = 1$, suy ra $a = 2, b = 3$ hoặc $a = 3, b = 2$.

Thử lại $(a; b; c) = (2; 3; 1), (3; 2; 1)$ đều thỏa mãn. Vậy $(a; b; c) = (2; 3; 1), (3; 2; 1)$.

2) Theo bất đẳng thức cơ bản $ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a + b + c)^2$ ta suy ra $ab + bc + ca \leq 3$. Hơn nữa, áp dụng bất đẳng thức cộng mẫu số ta có:

$$T \geq \frac{(a + b + c)^2}{ab + bc + ca + 2(a + b + c) + 9} \geq \frac{9}{3 + 6 + 9} = \frac{1}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. Giá trị nhỏ nhất của T là $\frac{1}{2}$.

Mặt khác rõ ràng: $T \leq \sum \frac{a^2}{2a + 3}$

Hơn nữa dễ dàng chứng minh $\frac{a^2}{2a + 3} \leq \frac{1}{3}a$ với mọi $0 \leq a \leq 3$ vì bất đẳng thức này tương đương với bất đẳng thức luôn đúng $a(a - 3) \leq 0$.

Do đó:

$$T \leq \frac{1}{3}(a + b + c) = 1$$

Dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi $a = 3, b = c = 0$. Giá trị lớn nhất của T là 1.

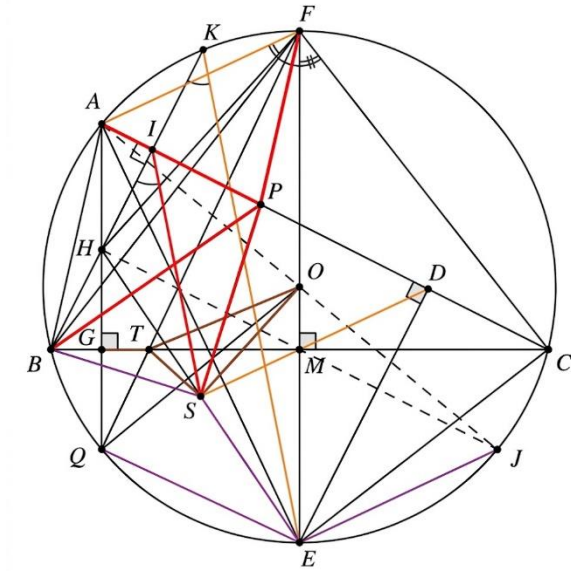
Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Đường thẳng MO cắt đường tròn (O) tại hai điểm E, F ($ME < MF$). Kẻ đường thẳng qua E vuông góc với đường thẳng AC tại điểm D . Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và S là trung điểm của đoạn thẳng HE .

1) Chứng minh tam giác BAF đồng dạng với tam giác MDC .

2) Đường thẳng AH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai Q . Đường thẳng QF cắt đường thẳng BC tại điểm T . Chứng minh điểm S thuộc đường thẳng MD và $TSO = 90^\circ$.

3) Đường thẳng qua S vuông góc với đường thẳng BS cắt đường thẳng AC tại điểm P . Chứng minh $PA = PF$.

Hướng dẫn giải



1) Vì $EMC = EDC = 90^\circ$ nên tứ giác $EMDC$ là tứ giác nội tiếp, dẫn đến $MDC + MEC = 180^\circ$. Trong khi đó, vì E, F lần lượt là trung điểm của cung nhỏ và cung lớn BC nên ta được $FEC = FEB$.

Kết hợp với việc tứ giác $ABEF$ là tứ giác nội tiếp thì ta thu được:

$$MDC = 180^\circ - MEC = 180^\circ - BEF = BAF$$

Kết hợp với $MCD = ACB = AFB$, ta suy ra $\triangle BAF \sim \triangle MDC$ (g.g).

2) Vì tứ giác $EMDC$ nội tiếp nên ta được $ADM = MEC = FAC$. Từ đó suy ra $MD \parallel AF$.

Dựng đường kính AJ của (O) . Khi đó để ý rằng $BHCJ$ là hình bình hành nên trung điểm M của BC cũng là trung điểm của HJ . Do đó MS là đường trung bình của $\triangle HEJ$, vì thế $MS \parallel EJ$.

Lại có AJ, EF là các đường kính của (O) , do đó $AEJF$ là hình chữ nhật, kéo theo $EJ \parallel AF$. Như vậy ta thu được $MS \parallel AF$.

Vì MS và MD cùng song song với AF nên ta thu được S, M, D thẳng hàng.

Gọi G là giao điểm của AH với BC . Để ý rằng ta có G là trung điểm của HQ (kết quả quen thuộc) nên GS là đường trung bình của $\triangle HQE$, dẫn đến $GS \parallel QE$. Kết hợp với $EQF = 90^\circ$ (do EF là đường kính của (O)), ta thu được:

$$TGS = 90^\circ - GTQ = AQF = QFO = FQO = TQO.$$

Mặt khác, chú ý rằng $\triangle GTQ \sim \triangle QEF$ (g.g) nên ta thu được:

$$\frac{TG}{TQ} = \frac{EQ}{EF} = \frac{2GS}{2QO} = \frac{GS}{QO}.$$

Do vậy ta được $\triangle TGS \sim \triangle TQO$ (c.g.c) dẫn đến $GTQ = GTS - QTS = QTO - QTS = STO$ và

$$\frac{TG}{TS} = \frac{TQ}{TO}.$$

Từ đó suy ra $\Delta TGQ \sim \Delta TSO$ (c.g.c), kéo theo $TSO = TGQ = 90^\circ$.

3) Đường thẳng BH lần lượt cắt AC và (O) tại các điểm I và K . Vì $BIP = BSP = 90^\circ$ nên tứ giác $BIPS$ là tứ giác nội tiếp.

Mặt khác, chú ý rằng I là trung điểm của HK (kết quả quen thuộc), SI là đường trung bình của ΔHKE , dẫn đến $SI \parallel EK$. Vì thế ta thu được:

$$BPS = BIS = BKE = BFE$$

Kết hợp với $BSP = BMP = 90^\circ$ suy ra $\Delta BSP \sim \Delta BMF$ (g.g).

Từ đó thu được $SBM = SBP - MBP = MBF - MBP = PBF$ và $\frac{BS}{BP} = \frac{BM}{BF}$.

Do vậy $\Delta BSM \sim \Delta BPF$ (c.g.c), cho ta: $PFB = SMB$.

Lại đề ý rằng $S \in MD$. Từ đó ta có biến đổi góc:

$$PFA = AFB + BFP = DCM + BMS = DEM + DEC = MEC = FAC.$$

Do vậy ΔPAF cân tại P , hay nói cách khác ta được $PA = PF$.

Câu V. (1,0 điểm) Với mỗi số nguyên dương n ($n \leq 99$), xét 100 số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

- i) $1 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{100}$.
 - ii) Với mọi $1 \leq j < i \leq 100$ thì $a_i - a_j \neq n$.
- 1) Khi $n = 2$, chứng minh $a_3 - a_1 \geq 4$.
- 2) Tìm tất cả giá trị của n để a_{100} nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

1) Ta sẽ chứng minh mệnh đề tổng quát sau với k, n bất kỳ:

$$a_{k+n} - a_k \geq 2n, \forall k \in \mathbb{Z}^+.$$

Thật vậy, giả sử $a_{k+n} - a_k \leq 2n - 1$. Đặt $b_i = a_{k+i} - a_{k+i-1}$ với $1 \leq i \leq n$. Ta có $b_1 + \dots + b_n \leq 2n - 1$. Xét các tổng $b_1, b_1 + b_2, \dots, b_1 + b_2 + \dots + b_n$.

Nếu tồn tại i sao cho $b_1 + \dots + b_i$ chia hết cho n , mà $0 < b_1 + \dots + b_i < 2n$, cho nên $b_1 + \dots + b_i = n$. Khi đó $a_{k+i} - a_k = b_1 + \dots + b_i = n$, vô lý.

Còn nếu các tổng trên đều không chia hết cho n , thì n tổng trên khi chia cho n sẽ nhận $n - 1$ số dư $1, 2, \dots, n - 1$. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại 2 tổng có cùng số dư khi chia cho n , giả sử đó là $b_1 + \dots + b_i$ và $b_1 + \dots + b_j$ với $1 \leq i < j$.

Khi đó $b_{i+1} + \dots + b_j = (b_1 + \dots + b_j) - (b_1 + \dots + b_i)$ phải chia hết cho n , mà $0 < b_{i+1} + \dots + b_j < 2n$, cho nên $b_{i+1} + \dots + b_j = n$. Khi đó $a_j - a_i = b_{i+1} + \dots + b_j = n$, vô lý.

Vậy giả sử trên là sai, ta đã chứng minh xong mệnh đề.

Cho $k=1, n=2$ ta có khẳng định cần chứng minh ($a_3 - a_1 \geq 4$).

2) Áp dụng mệnh đề trên, đặt $100 = pn + r$ với $0 \leq r < n$ và $p \geq 1$ (do $n < 100$).

Nếu $r = 0$ ta có $a_n \leq a_{2n} - 2n \leq a_{3n} - 4n \leq \dots \leq a_{pn} - (p-1)2n = a_{100} - (p-1)2n$, hay:

$$a_{100} \geq a_n + 2(p-1)n = a_n + 2pn - 2n = 200 + a_n - 2n$$

$$\text{Mặt khác, } a_n - a_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \geq \sum_{k=1}^{n-1} 1 = n-1.$$

Do đó:

$$a_{100} \geq 200 + a_1 + (n-1) - 2n = 200 + a_1 - n - 1 \geq 200 + 2 - 50 - 1 = 151$$

(Do $n \mid 100$ và $n < 100$ nên $n \leq 50$).

Dấu bằng có thể xảy ra tại dãy $(a_1, a_2, \dots, a_{100}) = (2, 3, \dots, 51, 102, 103, \dots, 151)$.

Nếu $r \neq 0$, tương tự ta có $a_r \leq a_{r+n} - 2n \leq \dots \leq a_{r+pn} - 2pn = a_{100} - 2pn$, hay:

$$a_{100} \geq a_r + 2pn = a_r + 200 - 2r \geq a_1 + (r-1) + 200 - 2r = 200 + a_1 - r - 1$$

Mà $100 = pn + r \geq n + r \geq 2r + 1$, từ đó suy ra $r \leq 49$. Từ đó:

$$a_{100} \geq 200 + 2 - 49 - 1 = 152 > 151$$

Tóm lại, giá trị nhỏ nhất của a_{100} bằng 151, xảy ra tại $n = 50$.

-----HẾT-----