

(Dành cho thí sinh dự thi vào lớp chuyên Tin)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (3,0 điểm)

a) Một khách sạn mở cửa 24 giờ mỗi ngày. Quản lý phân công vị trí trực lễ tân theo giờ. Số giờ trực được chia đều cho số nhân viên lễ tân. Sau khi tuyển thêm 1 nhân viên mới thì thời gian trực của mỗi nhân viên lễ tân giảm 48 phút. Hỏi ban đầu khách sạn có bao nhiêu nhân viên lễ tân?

b) Cho $P(x)$ là đa thức bậc 3 thỏa mãn $P(1) = 2$, $P(2) = 3$, $P(3) = 4$, $P(4) = 17$. Tính giá trị $P(0)$.

c) Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 2x + 16} = x - 1 + \frac{3}{x - 1}$.

Câu 2. (1,5 điểm) Cho m, n là hai số nguyên dương, $m > 1$ và p là số nguyên tố lẻ sao cho $p^m = 1 + 5 \cdot 2^n$.

a) Chứng minh rằng m là số chẵn.

b) Tìm tất cả các bộ (m, n, p) thỏa mãn.

Câu 3. (1,5 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c \geq 3$.

a) Chứng minh rằng $4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^3 + b^3}{(1 + c)^3} + \frac{b^3 + c^3}{(1 + a)^3} + \frac{c^3 + a^3}{(1 + b)^3}$.

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên BH, CH .

a) Chứng minh rằng $AE \cdot AC = AF \cdot AB$ và MN song song với EF .

b) Đường tròn tâm O đường kính AD cắt AB, AC lần lượt tại P, Q . Chứng minh rằng M, N, P, Q thẳng hàng.

c) Đường tròn đường kính DC cắt OC tại S (khác C), DS cắt AC tại T . Chứng minh $AC \cdot TQ = AT \cdot QC$.

Câu 5. (1,0 điểm) Ban đầu trên bảng viết cặp số có thứ tự $(2; 3)$. Mỗi bước bạn Phú được phép thay thế cặp $(x; y)$ trên bảng bằng một trong các cặp $(y; x), (-x; y), (y - x; y)$.

a) Hãy chỉ ra một cách thực hiện để sau hữu hạn bước bạn Phú viết được cặp $(4; 1)$ lên bảng.

b) Hỏi sau hữu hạn bước bạn Phú có viết được cặp (2026; 2027) lên bảng hay không?

-----HẾT-----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

UBND TỈNH PHÚ THỌ
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRUNG HỌC PHỔ THÔNG**
ĐỀ CHÍNH THỨC **NĂM HỌC 2026 – 2027**
MÔN THI: TOÁN

(Dành cho thí sinh dự thi vào lớp chuyên Tin)

Câu 1. (3,0 điểm)

a) Một khách sạn mở cửa 24 giờ mỗi ngày. Quản lý phân công vị trí trực lễ tân theo giờ. Số giờ trực được chia đều cho số nhân viên lễ tân. Sau khi tuyển thêm 1 nhân viên mới thì thời gian trực của mỗi nhân viên lễ tân giảm 48 phút. Hỏi ban đầu khách sạn có bao nhiêu nhân viên lễ tân?

b) Cho $P(x)$ là đa thức bậc 3 thỏa mãn $P(1) = 2$, $P(2) = 3$, $P(3) = 4$, $P(4) = 17$. Tính giá trị $P(0)$.

c) Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 2x + 16} = x - 1 + \frac{3}{x - 1}$.

Hướng dẫn giải

a) Gọi x là số nhân viên lễ tân ban đầu của khách sạn ($x \in \mathbb{N}^*$).

Tổng thời gian trực mỗi ngày là 24 giờ nên thời gian trực ban đầu của mỗi nhân viên là: $\frac{24}{x}$ (giờ).

Sau khi tuyển thêm 1 nhân viên, tổng số nhân viên là $x + 1$ (người) nên thời gian trực của mỗi nhân viên sau khi có người mới là $\frac{24}{x + 1}$ (giờ).

Vì thời gian trực của mỗi nhân viên lễ tân giảm đi 48 phút $= \frac{4}{5}$ giờ, ta có phương trình

$$\frac{24}{x} - \frac{24}{x + 1} = \frac{4}{5}.$$

Phương trình tương đương với $\frac{24}{x(x + 1)} = \frac{4}{5}$ hay $(x - 5)(x + 6) = 0$.

Từ đó phương trình có hai nghiệm $x = 5$ (TMĐK) và $x = -6$ (không TMĐK).

Vậy ban đầu khách sạn có 5 nhân viên lễ tân.

b) Đặt $Q(x) = P(x) - (x + 1)$.

Khi đó $Q(1) = Q(2) = Q(3) = 0$ nên $x = 1$, $x = 2$ và $x = 3$ là ba nghiệm của đa thức bậc 3 $Q(x)$.

Do $P(x)$ bậc 3 nên $Q(x)$ cũng bậc 3, từ đó $Q(x) = a(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ với a là hệ số cao nhất của $P(x)$.

Ta có $Q(4) = 6a = 12$ nên $a = 2$. Từ đó tính được $Q(0) = -12$ nên $P(0) = -11$.

c) ĐKXD: $x \neq 1$.

Đặt $t = x - 1$.

Phương trình trở thành $\sqrt{t^2 + 15} = t + \frac{3}{t}$ tương đương

$$\begin{cases} t + \frac{3}{t} \geq 0 \\ t^2 + 15 = \left(t + \frac{3}{t}\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t + \frac{3}{t} \geq 0 \\ t^2 = 1 \end{cases}$$

Suy ra $t = 1$ từ đó $x = 2$ thỏa mãn ĐKXD.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{2\}$.

Câu 2. (1,5 điểm) Cho m, n là hai số nguyên dương, $m > 1$ và p là số nguyên tố lẻ sao cho $p^m = 1 + 5 \cdot 2^n$.

a) Chứng minh rằng m là số chẵn.

b) Tìm tất cả các bộ (m, n, p) thỏa mãn.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử phản chứng m lẻ, phương trình đã cho trở thành $p^m - 1 = (p - 1)(p^{m-1} + p^{m-2} + \dots + 1) = 5 \cdot 2^n$

mà m lẻ và p lẻ nên $p^{m-1} + p^{m-2} + \dots + 1$ lẻ, suy ra $p^{m-1} + p^{m-2} + \dots + 1 = \{1; 5\}$.

Mặt khác $p \geq 3, m \geq 3$ nên $p^{m-1} + p^{m-2} + \dots + 1 \geq 3^2 + 3 + 1 = 13$ (mâu thuẫn).

Suy ra điều giả sử là sai. Vậy m là số chẵn.

b) Vì m chẵn nên ta đặt $m = 2k$ với k nguyên dương.

Khi đó, ta có $(p^k - 1)(p^k + 1) = 5 \cdot 2^n$.

Lúc này, vì $\gcd(p^k - 1, p^k + 1) \mid p^k + 1 - (p^k - 1) = 2$ và p lẻ nên $p^k + 1, p^k - 1$ chẵn ta suy ra $\gcd(p^k - 1, p^k + 1) = 2$. Do đó $p^k - 1$ và $p^k + 1$ không đồng thời chia hết cho 4.

Từ đây, kết hợp với $p^k - 1 < p^k + 1$ ta có các trường hợp sau:

- Nếu $p^k - 1 = 5 \cdot 2, p^k + 1 = 2^{n-1}$ thì $p = 11, k = 1$ nhưng không có giá trị n thỏa mãn.
- Nếu $p^k - 1 = 2^{n-1}, p^k + 1 = 5 \cdot 2$ thì ta được $p = 3, k = 2$ và suy ra $n = 4, m = 4$.

Thử lại, ta thấy thỏa mãn.

- Nếu $p^k + 1 = 5 \cdot 2^{n-1}, p^k - 1 = 2$ thì $p = 3, k = 1$ nhưng không có giá trị n thỏa mãn.

Vậy tất cả các bộ (m, n, p) thỏa mãn là $(4, 4, 3)$.

Câu 3. (1,5 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c \geq 3$.

a) Chứng minh rằng $4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^3 + b^3}{(1 + c)^3} + \frac{b^3 + c^3}{(1 + a)^3} + \frac{c^3 + a^3}{(1 + b)^3}$.

Hướng dẫn giải

a) Bất đẳng thức tương đương với

$$4(a + b)(a^2 - ab + b^2) - (a + b)^3 \geq 0$$

$$(a + b)[4(a^2 - ab + b^2) - (a + b)^2] \geq 0$$

$$3(a + b)(a - b)^2 \geq 0, \text{ luôn đúng.}$$

b) Theo câu a) thì $P \geq \frac{1}{4} \sum \left(\frac{a + b}{1 + c} \right)^3$.

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $\left(\frac{a + b}{1 + c} \right)^3 + 1 + 1 \geq 3 \frac{a + b}{1 + c}$ nên $P \geq \frac{3}{4} \sum \frac{a + b}{1 + c} - \frac{3}{2}$.

Lại có $\sum \frac{a + b}{1 + c} = \sum \left(\frac{a + b}{1 + c} + 1 \right) - 3 = (a + b + c + 1) \sum \frac{1}{1 + c} - 3 \geq \frac{9(a + b + c + 1)}{a + b + c + 3} - 3$.

Vì $\frac{a + b + c + 1}{a + b + c + 3} = 1 - \frac{2}{a + b + c + 3} \geq 1 - \frac{2}{3 + 3} = \frac{2}{3}$ nên $P \geq \frac{3}{4} \cdot 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{4}$.

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên BH, CH .

a) Chứng minh rằng $AE \cdot AC = AF \cdot AB$ và MN song song với EF .

b) Đường tròn tâm O đường kính AD cắt AB, AC lần lượt tại P, Q . Chứng minh rằng M, N, P, Q thẳng hàng.

c) Đường tròn đường kính DC cắt OC tại S (khác C), DS cắt AC tại T . Chứng minh $AC \cdot TQ = AT \cdot QC$.

Hướng dẫn giải



Câu 5. (1,0 điểm) Ban đầu trên bảng viết cặp số có thứ tự $(2; 3)$. Mỗi bước bạn Phú được phép thay thế cặp $(x; y)$ trên bảng bằng một trong các cặp $(y; x), (-x; y), (y - x; y)$.

a) Hãy chỉ ra một cách thực hiện để sau hữu hạn bước bạn Phú viết được cặp $(4; 1)$ lên bảng.

b) Hỏi sau hữu hạn bước bạn Phú có viết được cặp $(2026; 2027)$ lên bảng hay không?

Hướng dẫn giải

Từ các phép biến đổi ở đề bài, ta quy về được các phép biến đổi sau:

- Đổi chỗ hai số (đã được cho ở đề bài).
- Đổi dấu một số bất kỳ: Theo đề bài ta có thể đổi dấu số thứ nhất. Đối với số thứ hai ta có thể đổi dấu như sau: $(x, y) \rightarrow (y, x) \rightarrow (-y, x) \rightarrow (x, -y)$.
- Cộng hoặc trừ vào một số bởi số còn lại: Ta có thể làm như sau:

$$(x, y) \rightarrow (y - x, y) \rightarrow (x - y, y);$$

$$(x, y) \rightarrow (x, -y) \rightarrow (x - (-y), y) = (x + y, y);$$

$$(x, y) \rightarrow (y, x) \rightarrow (y - x, x) \rightarrow (x, y - x);$$

$$(x, y) \rightarrow (y, x) \rightarrow (y + x, x) \rightarrow (x, y + x).$$

a) Ta làm như sau: $(2, 3) \rightarrow (2, 3 - 2) = (2, 1) \rightarrow (2 + 1, 1) = (3, 1) \rightarrow (3 + 1, 1) = (4, 1)$.

b) Ta thực hiện được bằng cách tiếp tục quá trình câu a: $(4, 1) \rightarrow (5, 1) \rightarrow \dots \rightarrow (2026, 1)$

Rồi sau đó $(2026, 1) \rightarrow (2026, 1 + 2026) = (2026, 2027)$.

-----HẾT-----