

ĐỀ CHÍNH THỨC

MÔN THI: TOÁN

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 06/6/2026

(Đề thi gồm 02 trang)

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (2,0 điểm, mỗi câu đúng được 0,25 điểm)

Từ câu 1 đến câu 8, thí sinh viết phương án trả lời của mỗi câu vào bài làm.

Câu 1. Phương trình $3x - 12 = 0$ có nghiệm là

- A. $x = 4$. B. $x = -4$. C. $x = \frac{1}{4}$. D. $x = -\frac{1}{4}$.

Câu 2. Biểu thức $\sqrt{\frac{4}{9}} + \sqrt[3]{\frac{-8}{27}}$ có giá trị bằng

- A. $\frac{4}{3}$. B. 0. C. 1. D. $-\frac{2}{3}$.

Câu 3. Biết đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) đi qua điểm $M(-2; 12)$, khi đó giá trị của hệ số a là

- A. $a = -3$. B. $a = -6$. C. $a = 3$. D. $a = \frac{1}{3}$.

Câu 4. Bất phương trình $3x - 4 < 5$ có nghiệm là

- A. $x > 3$. B. $x < \frac{1}{3}$. C. $x < \frac{5}{3}$. D. $x < 3$.

Câu 5. Bán kính đường tròn nội tiếp hình vuông cạnh $3\sqrt{2}cm$ bằng

- A. $3cm$. B. $3\sqrt{2}cm$. C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}cm$. D. $6cm$.

Câu 6. Độ dài cung có số đo 50° của một đường tròn bán kính $R = 3cm$ bằng

- A. $\frac{5}{6}cm$. B. $\frac{5\pi}{18}cm$. C. $\frac{5\pi}{6}cm$. D. $\frac{5\pi}{2}cm$.

Câu 7. Sau khi khảo sát thời gian tự học môn Toán ở nhà mỗi ngày (đơn vị: phút) của 70 học sinh khối 9, người ta thu được bảng tần số ghép nhóm như sau

Thời gian tự học (phút)	$[30; 50)$	$[50; 70)$	$[70; 90)$	$[90; 110)$
Tần số (n)	7	20	28	15

Tần số tương đối của nhóm học sinh dành từ 70 đến dưới 90 phút tự học bằng

- A. 10%. B. 20%. C. 30%. D. 40%.

Câu 8. Trong một hộp có 5 quả bóng xanh, 9 quả bóng vàng và 6 quả bóng đỏ (các quả bóng có chất liệu và kích thước giống nhau). Lấy ngẫu nhiên 1 quả bóng trong hộp. Xác suất của biến cố “Quả bóng lấy ra có màu xanh” bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{3}{10}$. D. $\frac{3}{4}$.

II. PHẦN TỰ LUẬN (8,0 điểm)

Câu 9. (1,5 điểm)

a) Giải phương trình: $2x^2 + 3x - 5 = 0$.

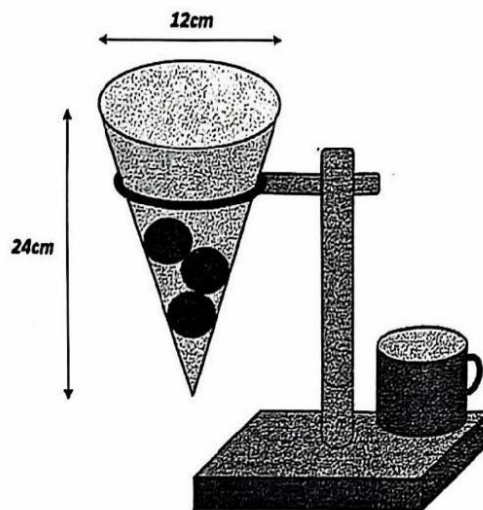
b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x - y = 6 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$.

Câu 10. (1,0 điểm) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{2x + 3\sqrt{x} - 8}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} + \frac{2}{\sqrt{x} + 2}$ (với $x \geq 0$ và $x \neq 1$).

Câu 11. (1,0 điểm) Cho phương trình bậc hai $x^2 - 3x + m - 3 = 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2^2 + 4x_2(x_1 - 1) - x_1 = m - 2$.

Câu 12. (1,0 điểm) Để mở rộng kinh doanh, một hộ kinh doanh đã vay tổng số tiền 700 triệu đồng, kì hạn một năm từ hai ngân hàng X và Y với lãi suất lần lượt là 8%/năm và 9%/năm. Sau đúng một năm kể từ ngày vay, hộ kinh doanh đó phải trả cho cả hai ngân hàng tổng số tiền lãi là 58 triệu đồng. Tính số tiền mà hộ kinh doanh đó đã vay từ mỗi ngân hàng.

Câu 13. (1,0 điểm) Một thiết bị thí nghiệm dùng để đựng nước có dạng hình nón rỗng đáy, được đặt lên giá theo phương thẳng đứng. Biết rằng, thiết bị có chiều cao bằng 24cm, đường kính đáy bằng 12cm và độ dày của thành không đáng kể (hình vẽ bên).



a) Tính thể tích nước tối đa mà thiết bị đó có thể đựng được theo đơn vị cm^3 (lấy $\pi \approx 3,14$).

b) Bỏ vào bên trong thiết bị ba viên bi hình cầu không thấm nước có cùng bán kính. Sau đó, đổ thêm vào thiết bị đó bốn cốc đầy nước, phần nước trong mỗi cốc có dạng hình trụ với bán kính đáy bằng 3cm và chiều cao bằng 7,5cm. Quan sát thấy mực nước bên trong thiết bị dâng lên vừa bằng miệng nón, các viên bi bị ngập hoàn toàn trong nước. Tính bán kính của mỗi viên bi. Biết rằng ban đầu thiết bị không chứa nước. (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai sau dấu phẩy theo đơn vị cm).

(Lưu ý: học sinh không nhất thiết phải vẽ hình trên vào bài làm).

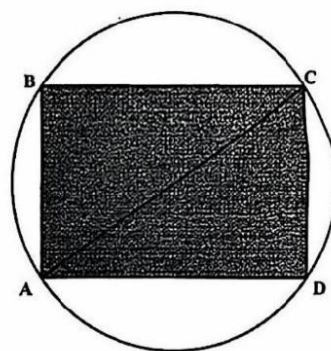
Câu 14. (2,0 điểm) Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M ở bên ngoài đường tròn. Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA và MB với đường tròn đó (A, B là các tiếp điểm).

a) Chứng minh $AOBM$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi I là giao điểm của OM và AB , K là điểm thuộc đoạn thẳng BI . Qua M kẻ đường thẳng d vuông góc với OK tại H . Chứng minh $OK.OH = R^2$.

c) Kẻ đường kính BD của đường tròn (O) , đường thẳng MD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai C (C khác D). Gọi E là trung điểm của MI . Chứng minh ba điểm A, C, E thẳng hàng.

Câu 15. (0,5 điểm) Một doanh nghiệp muốn quy hoạch một khu đất có dạng hình chữ nhật $ABCD$ với diện tích $67500m^2$ để làm khu liên hợp thể thao. Khu đất quy hoạch $ABCD$ được mở rộng thành một khu đất có dạng là hình tròn đường kính AC và phần đất mở rộng thêm đó được dùng làm khu sinh thái (minh họa hình vẽ bên). Gọi x và y (theo đơn vị mét) là các kích thước của hình chữ nhật $ABCD$.



a) Tính diện tích phần đất làm khu sinh thái theo x và y .

b) Doanh nghiệp muốn thiết kế sao cho các kích thước x, y là các số tự nhiên và phần diện tích đất làm khu sinh thái đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, hãy tính chu vi của khu đất $ABCD$ theo đơn vị mét.

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh:

SBD:

Chữ ký giám thị coi thi số 1:

Chữ ký giám thị coi thi số 2:

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 06/6/2026

(Đề thi gồm 02 trang)

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (2,0 điểm, mỗi câu đúng được 0,25 điểm)

Từ câu 1 đến câu 8, thí sinh viết phương án trả lời của mỗi câu vào bài làm.

Câu 1. Phương trình $3x - 12 = 0$ có nghiệm là

- A.** $x = 4$ **B.** $x = -4$ **C.** $x = \frac{1}{4}$ **D.** $x = -\frac{1}{4}$

Câu 2. Biểu thức $\sqrt{\frac{4}{9}} + \sqrt[3]{\frac{-8}{27}}$ có giá trị bằng

- A. $\frac{4}{3}$. B. 0. C. 1. D. $\frac{-2}{3}$.

Câu 3. Biết đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) đi qua điểm $M(-2; 12)$, khi đó giá trị của hệ số a là

- A.** $a = -3$. **B.** $a = -6$. **C.** $a = 3$. **D.** $a = \frac{1}{3}$.

Câu 4. Bất phương trình $3x - 4 < 5$ có nghiệm là

- A.** $x > 3$. **B.** $x < \frac{1}{3}$. **C.** $x < \frac{5}{3}$. **D.** $x < 3$.

Câu 5. Bán kính đường tròn nội tiếp hình vuông cạnh $3\sqrt{2}$ cm bằng

- A. 3 cm. B. $3\sqrt{2}$ cm C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm. D. 6 cm.

Câu 6. Độ dài cung có số đo 50° của một đường tròn bán kính $R = 3$ cm bằng

- A. $\frac{5\pi}{6}$ cm. B. $\frac{5\pi}{18}$ cm. C. $\frac{5\pi}{6}$ cm. D. $\frac{5\pi}{2}$ cm.

Câu 7. Sau khi khảo sát thời gian tự học môn Toán ở nhà mỗi ngày (đơn vị: phút) của 70 học sinh khối 9, người ta thu được bảng tần số ghép nhóm như sau:

Thời gian tự học (phút)	[30; 50)	[50; 70)	[70; 90)	[90; 110)
Tần số (n)	7	20	28	15

Tần số tương đối của nhóm học sinh dành từ 70 đến dưới 90 phút tự học bằng

- A. 10%. B. 20%. C. 30%. D. 40%.**

Câu 8. Trong một hộp có 5 quả bóng xanh, 9 quả bóng vàng và 6 quả bóng đỏ (các quả bóng có chất liệu và kích thước giống nhau). Lấy ngẫu nhiên 1 quả bóng trong hộp. Xác suất của biến cố "Quả bóng lấy ra có màu xanh" bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{3}{10}$. D. $\frac{3}{4}$.

II. PHẦN TỰ LUẬN (8,0 điểm)

Câu 9. (1,5 điểm)

a) Giải phương trình: $2x^2 + 3x - 5 = 0$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x - y = 6 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$
.

Câu 10. (1,0 điểm) Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{2x + 3\sqrt{x} - 8}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} + \frac{2}{\sqrt{x} + 2} \quad (\text{với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 1).$$

Câu 11. (1,0 điểm) Cho phương trình bậc hai $x^2 - 3x + m - 3 = 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 4x_2(x_1 - 1) - x_1 = m - 2$.

Câu 12. (1,0 điểm) Để mở rộng kinh doanh, một hộ kinh doanh đã vay tổng số tiền 700 triệu đồng, kì hạn một năm từ hai ngân hàng X và Y với lãi suất lần lượt là 8%/năm và 9%/năm. Sau đúng một năm kể từ ngày vay, hộ kinh doanh đó phải trả cho cả hai ngân hàng tổng số tiền lãi là 58 triệu đồng. Tính số tiền mà hộ kinh doanh đó đã vay từ mỗi ngân hàng.

Câu 13. (1,0 điểm) Một thiết bị thí nghiệm dùng để đựng nước có dạng hình nón rỗng đáy, được đặt lên giá theo phương thẳng đứng. Biết rằng, thiết bị có chiều cao bằng 24 cm, đường kính đáy bằng 12 cm và độ dày của thành không đáng kể (hình vẽ bên).

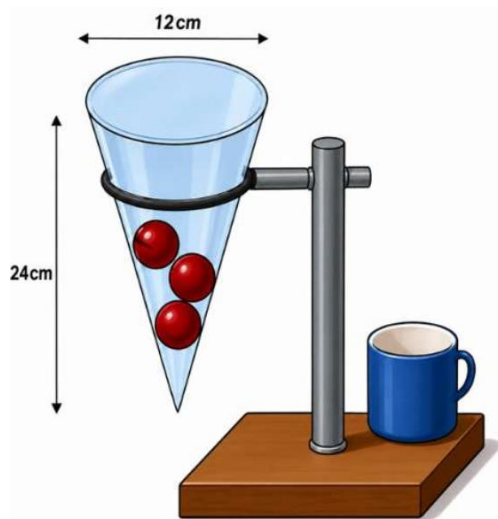
a) Tính thể tích nước tối đa mà thiết bị đó có thể đựng được theo đơn vị cm^3 (lấy $\pi \approx 3,14$).

b) Bỏ vào bên trong thiết bị ba viên bi hình cầu không thấm nước có cùng bán kính. Sau đó, đổ thêm vào thiết bị đó bốn cốc đầy nước, phần nước trong mỗi cốc có dạng hình trụ

với bán kính đáy bằng 3 cm và chiều cao bằng 7,5 cm. Quan sát thấy mực nước bên trong thiết bị dâng lên vừa bằng miệng nón, các viên bi bị ngập hoàn toàn trong nước. Tính bán kính của mỗi viên bi. Biết rằng ban đầu thiết bị không chứa nước.

(kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai sau dấu phẩy theo đơn vị cm).

(Lưu ý: học sinh không nhất thiết phải vẽ hình trên vào bài làm).



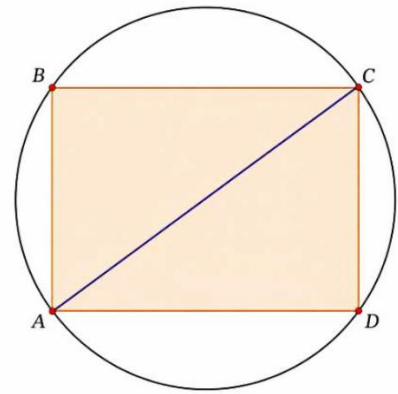
Câu 14. (2,0 điểm) Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M ở bên ngoài đường tròn. Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA và MB với đường tròn đó (A, B là các tiếp điểm).

a) Chứng minh $AOBM$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi I là giao điểm của OM và AB , K là điểm thuộc đoạn thẳng BI . Qua M kẻ đường thẳng d vuông góc với OK tại H . Chứng minh $OK.OH = R^2$.

c) Kẻ đường kính BD của đường tròn (O) , đường thẳng MD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai C (C khác D). Gọi E là trung điểm của MI . Chứng minh ba điểm A, C, E thẳng hàng.

Câu 15. (0,5 điểm) Một doanh nghiệp muốn quy hoạch một khu đất có dạng hình chữ nhật $ABCD$ với diện tích $67\,500\text{ m}^2$ để làm khu liên hợp thể thao. Khu đất quy hoạch $ABCD$ được mở rộng thành một khu đất có dạng là hình tròn đường kính AC và phần đất mở rộng thêm đó được dùng làm khu sinh thái (minh họa hình vẽ bên). Gọi x và y (theo đơn vị mét) là các kích thước của hình chữ nhật $ABCD$.



a) Tính diện tích phần đất làm khu sinh thái theo x và y .

b) Doanh nghiệp muốn thiết kế sao cho các kích thước x, y là các số tự nhiên và phần diện tích đất làm khu sinh thái đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, hãy tính chu vi của khu đất $ABCD$ theo đơn vị mét.

----- **HẾT** -----

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THANH HÓA**

**HƯỚNG DẪN GIẢI
KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027
MÔN THI: TOÁN**

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (2,0 điểm)

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8
Đáp án	A	B	C	D	C	C	D	B

II. PHẦN TỰ LUẬN (8,0 điểm)

Câu 9. (1,5 điểm)

a) Giải phương trình: $2x^2 + 3x - 5 = 0$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x - y = 6 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$
.

Hướng dẫn giải

a) $2x^2 + 3x - 5 = 0$

Ta có: $a = 2, b = 3, c = -5$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)$$

$$\Delta = 9 + 40 = 49$$

Vì $\Delta > 0$, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 7}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 7}{4} = -\frac{5}{2}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x \in \left\{ 1; -\frac{5}{2} \right\}$.

b)
$$\begin{cases} 3x - y = 6 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x - 2y = 12 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x = 14 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (2; 0)$.

Câu 10. (1,0 điểm) Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{2x + 3\sqrt{x} - 8}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} + \frac{2}{\sqrt{x} + 2} \quad (\text{với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 1).$$

Hướng dẫn giải

Với $x \geq 0; x \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2x + 3\sqrt{x} - 8}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} + \frac{2}{\sqrt{x} + 2} \\ &= \frac{2x + 3\sqrt{x} - 8 - (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2) + 2(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \frac{2x + 3\sqrt{x} - 8 - x + 4 + 2\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{x + 5\sqrt{x} - 6}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 6)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{\sqrt{x} + 6}{\sqrt{x} + 2}. \end{aligned}$$

Câu 11. (1,0 điểm) Cho phương trình bậc hai $x^2 - 3x + m - 3 = 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 4x_2(x_1 - 1) - x_1 = m - 2$.

Hướng dẫn giải

Để phương trình $x^2 - 3x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì:

$$\Delta > 0 \text{ hay } (-3)^2 - 4(m - 3) > 0 \text{ hay } m < \frac{21}{4}.$$

Áp dụng hệ thức Viète, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = m - 3 \end{cases}$$

Vì x_2 là một nghiệm của phương trình trên nên ta có:

$$x_2^2 - 3x_2 + m - 3 = 0$$

$$x_2^2 - 3x_2 = 3 - m$$

Để $x_2^2 + 4x_2(x_1 - 1) - x_1 = m - 2$ thì:

$$x_2^2 + 4x_1x_2 - 4x_2 - x_1 = m - 2$$

$$(x_2^2 - 3x_2) + 4x_1x_2 - (x_2 + x_1) = m - 2$$

$$3 - m + 4(m - 3) - 3 = m - 2$$

$$2m = 10$$

$$m = 5 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy $m = 5$.

Câu 12. (1,0 điểm) Để mở rộng kinh doanh, một hộ kinh doanh đã vay tổng số tiền 700 triệu đồng, kì hạn một năm từ hai ngân hàng **X** và **Y** với lãi suất lần lượt là 8%/năm và 9%/năm. Sau đúng một năm kể từ ngày vay, hộ kinh doanh đó phải trả cho cả hai ngân hàng tổng số tiền lãi là 58 triệu đồng. Tính số tiền mà hộ kinh doanh đó đã vay từ mỗi ngân hàng.

Hướng dẫn giải

Gọi x, y (triệu đồng) lần lượt là số tiền hộ kinh doanh vay ở ngân hàng X, Y ($0 < x; y < 700$).

Theo đề bài, tổng số tiền vay là 700 triệu đồng, nên: $x + y = 700$ (1)

Lãi suất ngân hàng X là 8%/năm, nên tiền lãi sau một năm là: $0,08x$ (triệu đồng).

Lãi suất ngân hàng Y là 9%/năm, nên tiền lãi sau một năm là: $0,09y$ (triệu đồng).

Tổng tiền lãi sau một năm là 58 triệu đồng, nên: $0,08x + 0,09y = 58$ (2)

Theo đề bài, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 700 \\ 0,08x + 0,09y = 58 \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất: $x = 700 - y$

Thay vào phương trình thứ hai, ta được:

$$0,08(700 - y) + 0,09y = 58$$

$$56 - 0,08y + 0,09y = 58$$

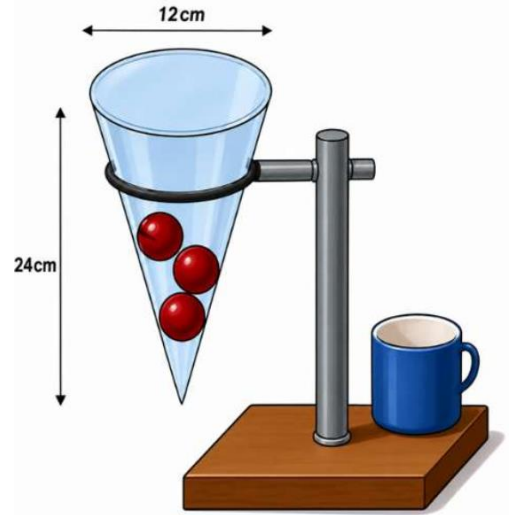
$$0,01y = 2$$

$$y = 200 \text{ (TMĐK)}$$

Suy ra: $x = 700 - 200 = 500$ (TMĐK)

Vậy hộ kinh doanh đã vay từ ngân hàng X là 500 triệu đồng, ngân hàng Y là 200 triệu đồng.

Câu 13. (1,0 điểm) Một thiết bị thí nghiệm dùng để đựng nước có dạng hình nón rỗng đáy, được đặt lên giá theo phương thẳng đứng. Biết rằng, thiết bị có chiều cao bằng 24 cm, đường kính đáy bằng 12 cm và độ dày của thành không đáng kể (hình vẽ bên).



a) Tính thể tích nước tối đa mà thiết bị đó có thể đựng được theo đơn vị cm^3 (lấy $\pi \approx 3,14$).

b) Bỏ vào bên trong thiết bị ba viên bi hình cầu không thấm nước có cùng bán kính. Sau đó, đổ thêm vào thiết bị đó bốn cốc đầy nước, phần nước trong mỗi cốc có dạng hình trụ với bán kính đáy bằng 3 cm và chiều cao bằng 7,5 cm. Quan sát thấy mực nước bên trong thiết bị dâng lên vừa bằng miệng nón, các viên bi bị ngập hoàn toàn trong nước. Tính bán kính của mỗi viên bi. Biết rằng ban đầu thiết bị không chứa nước.

(kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai sau dấu phẩy theo đơn vị cm).

(Lưu ý: học sinh không nhất thiết phải vẽ hình trên vào bài làm).

Hướng dẫn giải

a) Bán kính đáy của thiết bị là: $r_1 = \frac{d_1}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ (cm)}$

Thể tích nước tối đa mà thiết bị đó có thể đựng nước là:

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi r_1^2 h_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 24 = 288\pi \approx 288 \cdot 3,14 = 904,32 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

b) Thể tích của mỗi cốc là: $V_2 = \pi r_2^2 h_2 = \pi \cdot 3^2 \cdot 7,5 = \frac{135}{2} \pi \text{ (cm}^3\text{)}.$

Thể tích của lượng nước đổ vào thiết bị là: $V_3 = 4V_2 = 4 \cdot \frac{135}{2} \pi = 270\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$

Thể tích của ba viên bi là: $V_4 = V_1 - V_3 = 288\pi - 270\pi = 18\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$

Gọi $R \text{ (cm)}$ là bán kính của mỗi viên bi ($R > 0$).

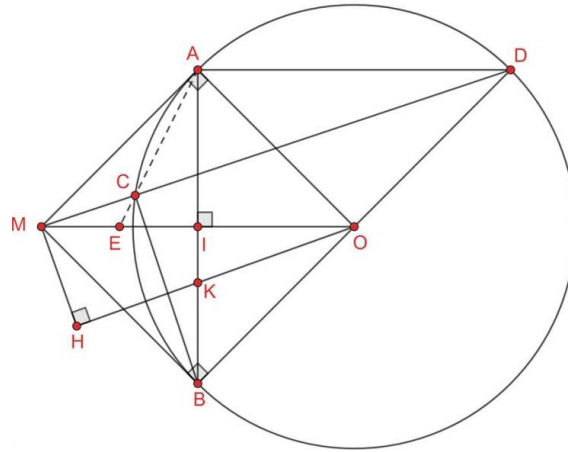
$$\text{Ta có } 3 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = 18\pi \quad \text{nên} \quad R^3 = \frac{9}{2} \quad \text{hay} \quad R = \sqrt[3]{\frac{9}{2}} \approx 1,65 \text{ (cm)}.$$

Câu 14. (2,0 điểm) Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M ở bên ngoài đường tròn. Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA và MB với đường tròn đó (A, B là các tiếp điểm).

a) Chứng minh $AOBM$ là tứ giác nội tiếp.

- b) Gọi I là giao điểm của OM và AB , K là điểm thuộc đoạn thẳng BI . Qua M kẻ đường thẳng d vuông góc với OK tại H . Chứng minh $OK.OH = R^2$.
- c) Kẻ đường kính BD của đường tròn (O) , đường thẳng MD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai C (C khác D). Gọi E là trung điểm của MI . Chứng minh ba điểm A, C, E thẳng hàng.

Hướng dẫn giải



a) Vì MA, MB là các tiếp tuyến của (O) lần lượt tại A, B nên $MA \perp OA, MB \perp OB$

Vì $\triangle MAO$ vuông tại A nên $\triangle MAO$ nội tiếp đường tròn đường kính MO .

Vì $\triangle MBO$ vuông tại B nên $\triangle MBO$ nội tiếp đường tròn đường kính MO .

Suy ra bốn điểm M, A, O, B cùng thuộc đường tròn đường kính MO .

Vậy $AOBM$ là tứ giác nội tiếp.

b) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có: $MA = MB$ nên M thuộc đường trung trực của AB .

Mà $OA = OB = R$ nên O thuộc đường trung trực của AB .

Do đó, MO là đường trung trực của AB .

Mà OM cắt AB tại I nên $OM \perp AB$ và I là trung điểm của AB .

$\triangle OAI \sim \triangle OMA$ (g.g) vì: $\angle OIA = \angle OMA = 90^\circ$, $\angle AOM$ chung

Nên $\frac{OA}{OM} = \frac{OI}{OA}$ hay $OM \cdot OI = OA^2 = R^2$.

Lại có: $\triangle OIK \sim \triangle OHM$ (g.g) vì: $\angle OIK = \angle OHM = 90^\circ$, $\angle HOM$ chung.

$$\text{Suy ra } \frac{OI}{OH} = \frac{OK}{OM} \text{ hay } OI \cdot OM = OH \cdot OK$$

$$\text{Do đó } OH \cdot OK = R^2.$$

c) AC cắt OM tại E' . Ta chứng minh E' là trung điểm của MI .

Vì $ME' \parallel AD$ nên $\widehat{E'MC} = \widehat{CDA}$ (hai góc so le trong)

$\triangle ME'C \sim \triangle DAC$ (g.g) vì: $\widehat{E'MC} = \widehat{CDA}$, $\widehat{MCE'} = \widehat{ACD}$ (hai góc đối đỉnh)

$$\text{Nên } \frac{ME'}{DA} = \frac{MC}{DC} \quad (1)$$

Xét đường tròn (O) có: $\widehat{BCD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\triangle MCB \sim \triangle BCD$ (g.g) vì: $\widehat{MCB} = \widehat{BCD} = 90^\circ$; $\widehat{MBC} = \widehat{BDC} (= 90^\circ - \widehat{CBD})$

$$\text{Nên } \frac{MC}{BC} = \frac{CB}{CD} = \frac{MB}{BD}$$

$$\text{Suy ra } \frac{MC}{DC} = \frac{MC}{BC} \cdot \frac{CB}{CD} = \left(\frac{MB}{BD} \right)^2 = \left(\frac{MB}{2R} \right)^2 \quad (2)$$

Xét $\triangle ABD$ có I, O lần lượt là trung điểm của BA, BD

$$\text{Suy ra } IO \text{ là đường trung bình của } \triangle ABD \text{ hay } IO = \frac{1}{2} AD \quad (3)$$

$\triangle MIB \sim \triangle BIO$ (g.g) vì: $\widehat{MIB} = \widehat{BIO} = 90^\circ$; $\widehat{MBI} = \widehat{BOI} (= 90^\circ - \widehat{IBO})$

$$\text{Nên } \frac{MI}{BI} = \frac{IB}{IO} = \frac{MB}{BO}$$

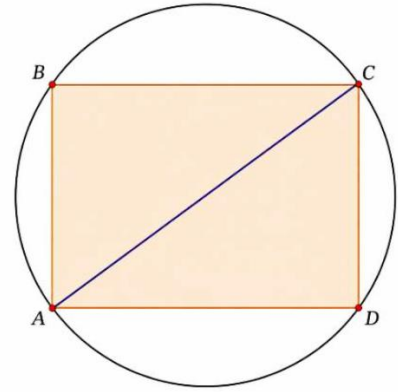
$$\text{Suy ra } \frac{MI}{IO} = \frac{MI}{BI} \cdot \frac{IB}{IO} = \left(\frac{MB}{BO} \right)^2 = \left(\frac{MB}{R} \right)^2 \quad (4)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra } \frac{ME'}{DA} = \frac{MC}{DC} = \frac{MB^2}{4R^2} = \frac{MI}{4IO} = \frac{MI}{2AD}.$$

Suy ra $MI = 2ME'$ hay E' là trung điểm của MI .

Do đó, E' trùng E nên ba điểm A, C, E thẳng hàng.

Câu 15. (0,5 điểm) Một doanh nghiệp muốn quy hoạch một khu đất có dạng hình chữ nhật $ABCD$ với diện tích $67\,500\text{ m}^2$ để làm khu liên hợp thể thao. Khu đất quy hoạch $ABCD$ được mở rộng thành một khu đất có dạng là hình tròn đường kính AC và phần đất mở rộng thêm đó được dùng làm khu sinh thái (minh họa hình vẽ bên). Gọi x và y (theo đơn vị mét) là các kích thước của hình chữ nhật $ABCD$.



- a) Tính diện tích phần đất làm khu sinh thái theo x và y .
- b) Doanh nghiệp muốn thiết kế sao cho các kích thước x, y là các số tự nhiên và phần diện tích đất làm khu sinh thái đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, hãy tính chu vi của khu đất $ABCD$ theo đơn vị mét.

Hướng dẫn giải

a) Hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O đường kính AC .

Theo định lý Pythagore cho $\triangle DAC$ vuông tại D thì:

$$AC^2 = DA^2 + DC^2 = x^2 + y^2 \text{ nên } AC = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ (m)}$$

Bán kính của hình tròn đường kính AC là: $R = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} \text{ (m)}$

Diện tích của hình tròn đường kính AC là:

$$S_{\text{tròn}} = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{4} (x^2 + y^2) \text{ (m}^2\text{)}$$

Diện tích phần đất làm khu sinh thái là: $S = S_{\text{tròn}} - S_{ABCD} = \frac{\pi}{4} (x^2 + y^2) - 67\,500 \text{ (m}^2\text{)}.$

b) Bài toán trở thành: Cho $x, y \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $xy = 67500$. Tìm giá trị nhỏ nhất của S .

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \leq y$.

Khi đó, $x^2 \leq xy = 67500$ nên $x \leq \sqrt{67500} = 259,807\dots$

Vì $x \in \mathbb{N}$ nên $x \leq 259$

Mà $x \in U^{(67\,500)}$ nên $x \leq 250$

(vì các số 251; 252; 253; ... ; 259 đều không là ước của 67 500)

Suy ra $y = \frac{67500}{x} \geq \frac{67500}{250} = 270$

Do đó, ta có bất đẳng thức: $(x - 250)(y - 250) \leq 0$.

$$xy - 250(x + y) + 62\,500 \leq 0$$

$$250(x + y) \geq 67\,500 + 62\,500 = 130\,000$$

Nên $x + y \geq 520$

Suy ra $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy \geq 520^2 - 2 \cdot 67\,500 = 135\,400$

Nên $S \geq 135\,400 \cdot \frac{\pi}{4} - 67\,500 = 33\,850\pi - 67\,500 \text{ (m}^2\text{)}$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 250$ và $y = 270$.

Khi đó, chu vi của mảnh đất $ABCD$ là $2(x + y) = 2 \cdot (250 + 270) = 1040 \text{ (m)}$.

----- HẾT -----